Def Superficie orientabile (la definizione di mercoledì non era corretta)

Sia $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$, D dominio regolare di $\mathbb{R}^2$ una superficie regolare.
Sia $\mathring{D}$ l'insieme dei pti interni di D.

In ogni punto di $S_0 = \varphi(\mathring{D})$ è definito il versore normale
$\nu = \dfrac{\underline{\varphi_u} \wedge \underline{\varphi_v}}{\|\underline{\varphi_u} \wedge \underline{\varphi_v}\|}$ continuo su S_0

La superficie si dice orientabile se è possibile estendere ν a tutto $S = \varphi(D)$ in modo continuo.

Se $\underset{\sim}{F}(x,y,z) : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo vettoriale C^1, definiamo

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \nabla \cdot \underline{F}$$ è una funzione scalare

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Sia E un dominio regolare di $\mathbb{R}^3$. Sia $\underline{F}(x,y,z)$ un campo vettoriale $C^1(E;\mathbb{R}^3)$. Allora

$$\underbrace{\iint_{\partial E} \underline{F} \cdot \underline{\nu_e} \, d\sigma}_{\text{flusso di } F \text{ uscente da } \partial E} = \iiint_E \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz.$$

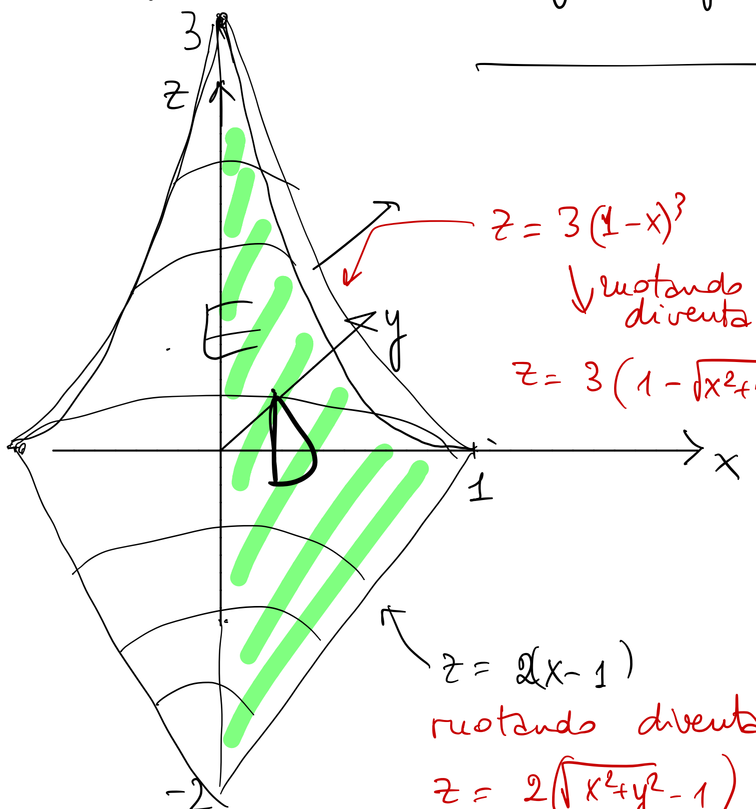
ESERCIZIO Sia D l'insieme

$$D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \le x \le 1 \,, \quad 2(x-1) \le z \le 3(1-x)^3\}$$

Sia E il solido contenuto nel semispazio $y \geq 0$ ottenuto ruotando D di un angolo piatto intorno all'asse z.

Calcolare il flusso uscente da ∂E del campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z) = \left(2xy^2 + 6zy,\ x - y^3,\ 4x^2 z\right).$$



$$\operatorname{div} F = 2y^2 - 3y^2 + 4x^2 = $$
$$= 4x^2 - y^2$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$$

Usiamo il teorema della divergenza.

$$\iint_{\partial E} F \cdot \nu_e \, d\sigma = \iiint_E \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \iiint_E (4x^2 - y^2)\, dx\,dy\,dz =$$

in coord. cilindriche

$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_{2(\rho-1)}^{3(1-\rho)^3} dz \ \rho^3 \left(4\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) = \int_0^{\pi} d\theta \left(4\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) \cdot$$

(facile)

$$\cdot \int_0^1 d\rho \ \rho^3 \left(3(1-\rho)^3 - 2(\rho-1)\right)$$

Se avessimo voluto fare il calcolo diretto del flusso, avremmo dovuto fare

$$\iint_{\partial E} F \cdot \nu_e \, d\sigma = \iint_{S_1} F \cdot \nu_e \, d\sigma + \iint_{S_2} F \cdot \nu_e \, d\sigma + \iint_{S_3} F \cdot \underline{\nu}_e \, d\sigma$$

dove S_1 è la superficie di rotazione (cono) $z = 2\left(\sqrt{x^2+y^2} - 1\right)$

S_2 è la superficie di rotazione $z = 3\left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right)^3$

S_3 è la parte del piano xz che chiude E. (più complicato)

Per esercizio, calcoliamo il secondo integrale.

$$S_2 \quad \psi: \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = 3(1-\rho)^3 \end{cases} \qquad (\theta, \rho) \in [0,\pi] \times [0,1].$$

$$\psi_\rho = \left(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, -9(1-\rho)^2\right)$$

$$\psi_\theta = \left(-\rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho\cos\theta, 0\right)$$

$$A(\rho,\theta) = 9\rho(1-\rho)^2\cos\theta; \quad B(\rho,\theta) = 9\rho(1-\rho)^2\,\mathrm{sen}\,\theta; \quad C(\rho,\theta) = \rho$$

fornisce il vettore normale esterno!

<u>Flusso</u> uscente da $S_2 = \iint_{S_2} F \cdot \nu_e \, d\sigma =$

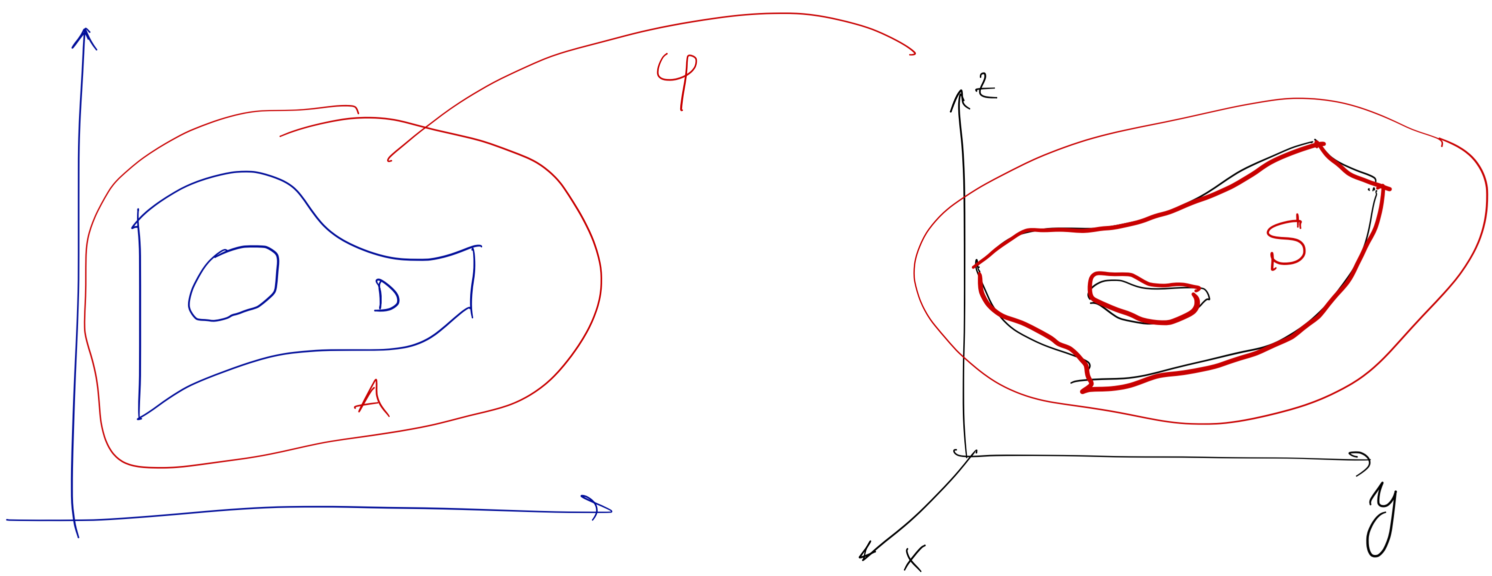
$$= \int_0^\pi d\theta \int_0^1 d\rho \Big[\left(2\rho\cos\theta\,\rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta + 6(1-\rho)^3\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\right) 9\rho(1-\rho)^2\cos\theta +$$
$$+ \left(\rho\cos\theta - \rho^3\,\mathrm{sen}^3\theta\right) 9\rho(1-\rho)^2\,\mathrm{sen}\,\theta + 4\rho^2\cos^2\theta \cdot 3(1-\rho)^3 \cdot \rho\Big]$$

SUPERFICIE CON BORDO

Def. Una superficie con bordo è un'applicazione

$\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

D dominio regolare di $\mathbb{R}^2$, φ restrizione di una funzione C^1 definita su un aperto $A \supset D$.



t.c. 1) φ iniettiva su tutto D (fino alla frontiera)

2) $\varphi_u \wedge \varphi_v \neq 0$ su tutto D (" " ")

L'immagine di ∂D tramite φ si chiama bordo della superficie.
Se $S = \varphi(D)$, chiamiamo $bS = \varphi(\partial D)$

Possiamo immaginare una superficie con bordo come una superficie ottenuta "ritagliando" una superficie più grande.

<u>OSS</u> Non bisogna confondere il bordo della superficie con la frontiera (in senso topologico) della superficie, che è tutta la superficie stessa, non essendoci pti interni.

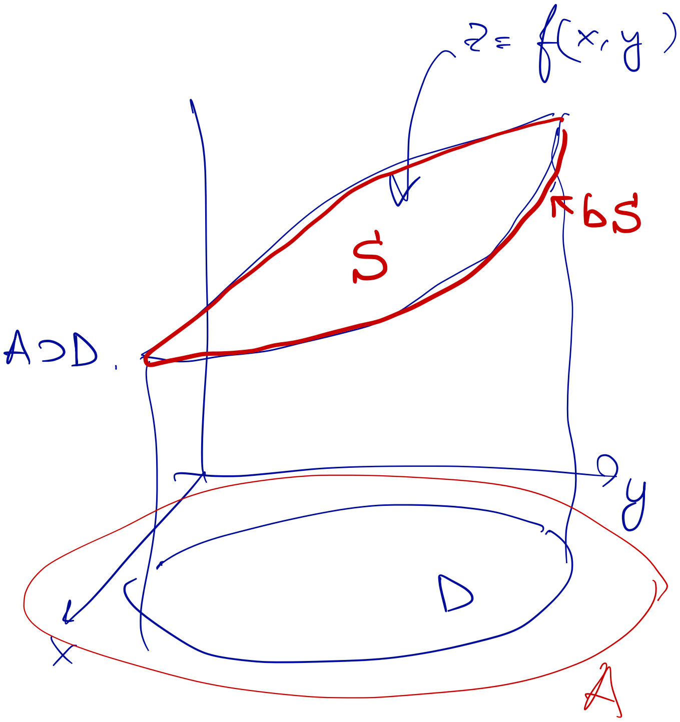
Esempi di superfici con bordo

1) Superfici grafico

$$z = f(x,y)$$

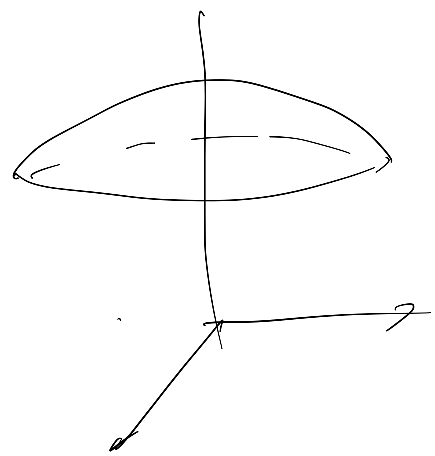
$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

f restrizione a D di una f definita su $A \supset D$.

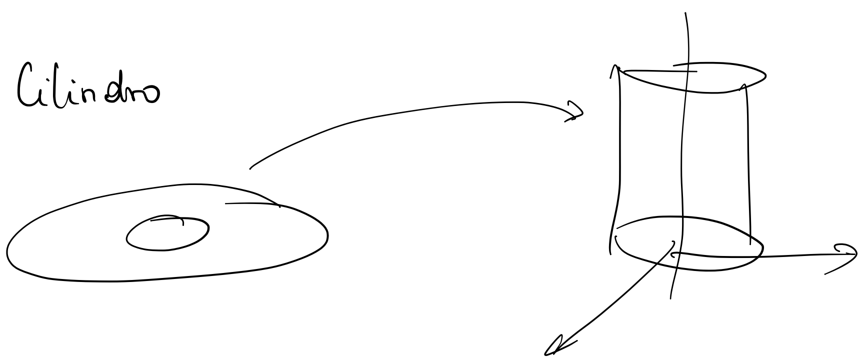


2) segmento sferico $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

$(x,y) \in D = \{ (x,y) : \; x^2 + y^2 \leq r^2 < R^2$.



3) Cilindro

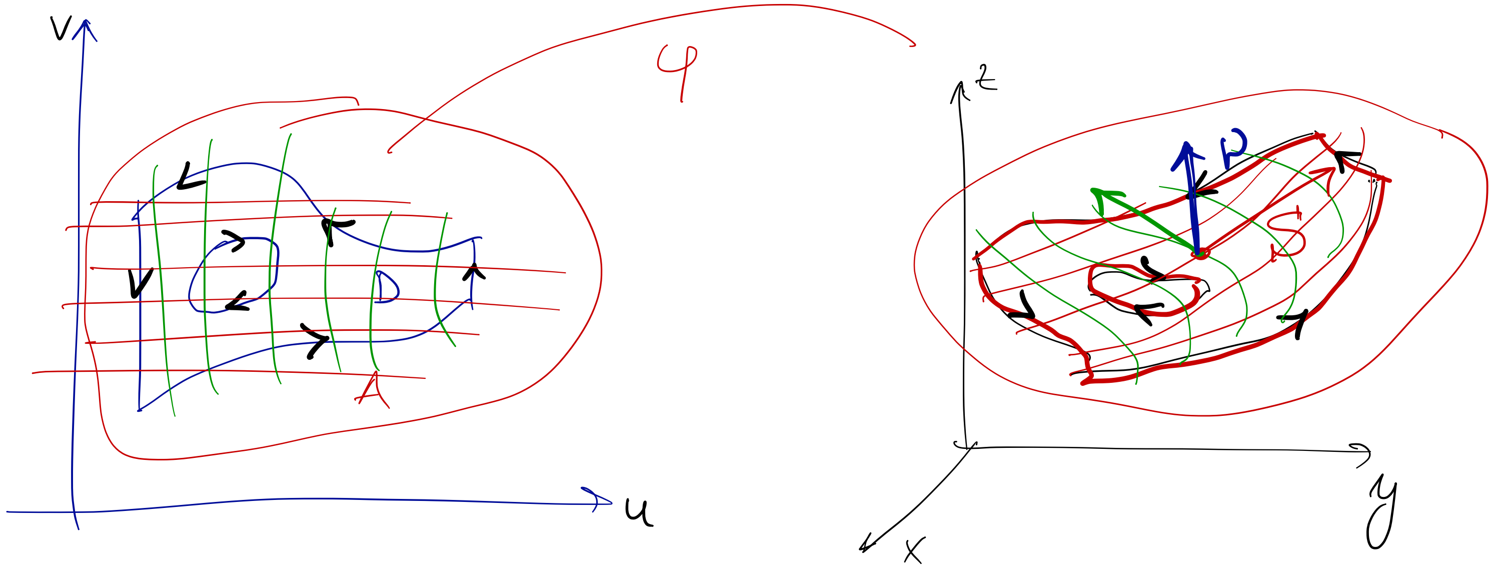


Esempi di superfici senza bordo

Sfera. Toro

Si può dimostrare che le superfici con bordo sono orientabili.

ORIENTAZIONE DEL BORDO



La frontiera di D viene orientata nel modo consueto (lasciando il dominio D sulla sx). Questo induce un verso di percorrenza del bordo di S.
Ma allo stesso tempo la scelta dell'ordine delle variabili u e v ha indotto la scelta del versore normale (in altre parole, di una "pagina" di S).

E' facile convincersi che l'orientazione del bordo e l'orientazione del versore normale sono collegate: guardando S dal lato del versore normale si vede percorrere il bordo lasciando S sulla sinistra

Il bordo di S è unione di curve regolari.

Rotore di un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$

Sia $\underline{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, A aperto

un campo vettoriale di classe $C^1(A; \mathbb{R}^3)$

$$\underline{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$

Def. $\operatorname{rot} F = \nabla \wedge F = \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} =$

$$= \left((F_3)_y - (F_2)_z, (F_1)_z - (F_3)_x, (F_2)_x - (F_1)_y\right)$$

OSS Nel caso della dim 2, cioè di un campo vettoriale

$\underline{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ possiamo "immergerlo" in $\mathbb{R}^3$.

Considero

$$\underline{F}(x,y,z) = (F_1(x,y), F_2(x,y), 0)$$

applicando la formula di sopra si ottiene

$\operatorname{rot} \underline{F} = (0, 0, (F_2)_x - (F_1)_y)$ in accordo con la def. 2-d.

TEOREMA DI STOKES.

Sia $\overset{1}{S} = \varphi(D)$ una superficie con bordo.

Sia $\underline{F}$ un campo vettoriale C^1 definito in un aperto contenente $\overset{1}{S}$.

Allora si ha (scelta un'orientazione di S e quindi di bS)

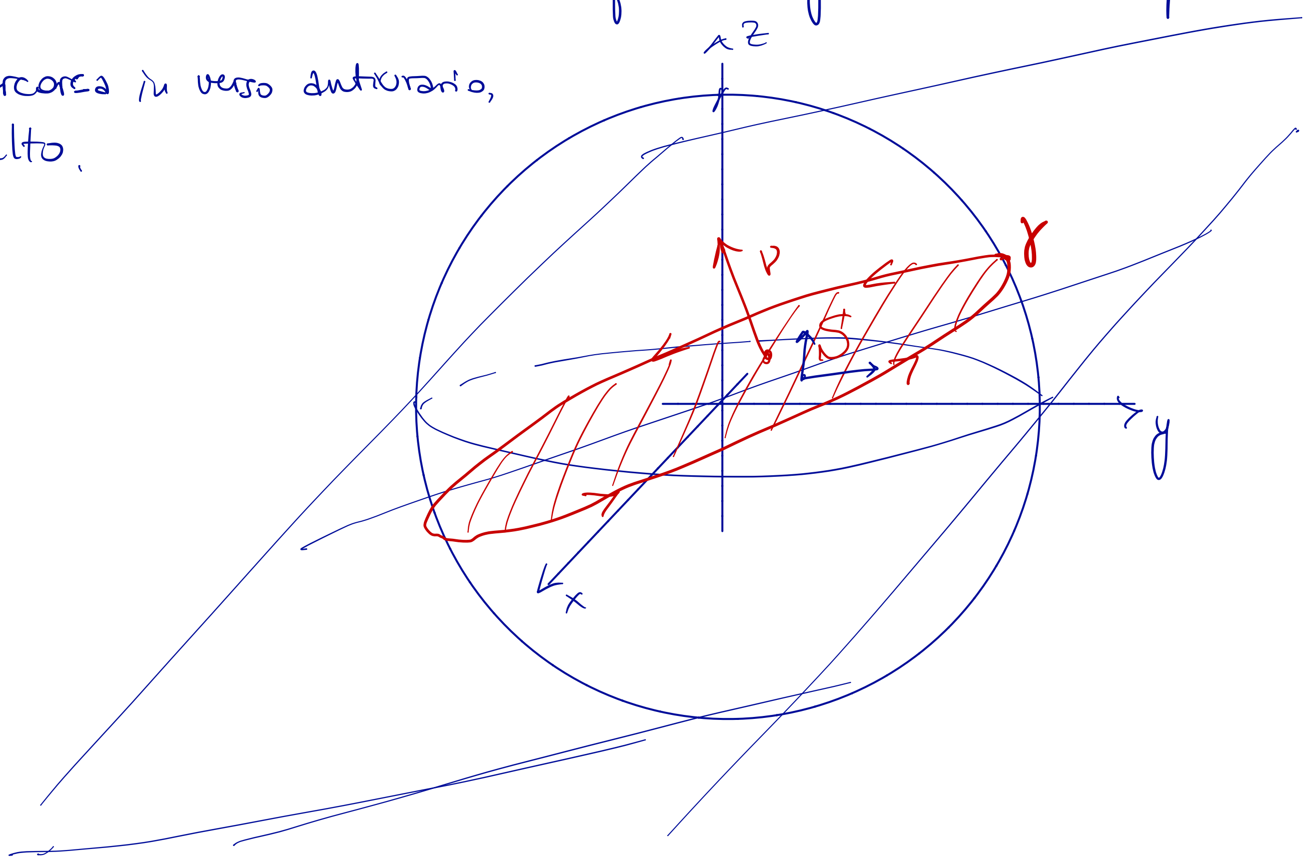
$$\int_{b^+S} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, d\sigma$$

dove l'orientazione del bordo e l'orientazione di ν sono coerenti.

ESERCIZIO Calcolare l'integrale

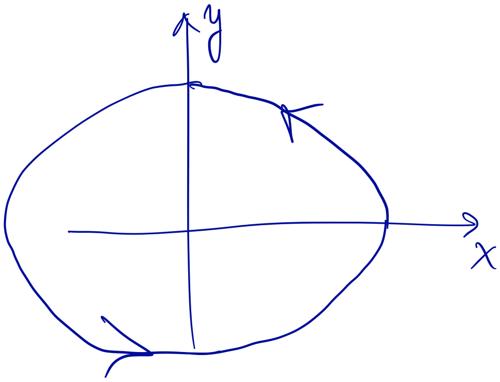
$$\int_\gamma (z-2y)\,dx + (z-2x)\,dy + (x+3y+y^2)\,dz$$

dove γ è la curva intersezione della sfera $x^2+y^2+z^2=1$ e del piano $y = 2z$, percorsa in verso antiorario, vista dall'alto.



$$\gamma \qquad x^2+y^2+z^2=1 \qquad y=2z$$

$$x^2+y^2+\frac{y^2}{4}=1 \qquad x^2+\frac{5}{4}y^2=1, \qquad x^2+\frac{y^2}{(2/\sqrt{5})^2}=1$$



$$\gamma \begin{cases} x=\cos t \\ y=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{sen}\,t \\ z=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi] \qquad \text{orientata correttamente}$$

Il calcolo diretto fornisce, $\underline{F}(x,y,z)=\left(z-2y,\ z-2x,\ x+3y+y^2\right)$

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma F\cdot T\,ds = \int_0^{2\pi}\Big[\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{sen}\,t-\frac{4}{\sqrt{5}}\,\mathrm{sen}\,t\Big)(-\mathrm{sen}\,t)+\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}\cancel{\mathrm{sen}\,t}-2\cos t\Big)\frac{2}{\sqrt{5}}\cos t+$$

$$+\Big(\cos t+\cancel{\frac{6}{\sqrt{5}}\,\mathrm{sen}\,t}+\cancel{\frac{4}{5}\,\mathrm{sen}^2 t}\Big)\frac{1}{\sqrt{5}}\cos t\Big]\,dt$$

= completare

Usando Stokes.

γ è il bordo della superficie $S = \{(x,y,z) : y = 2z, \ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

$$F(x,y,z) = \left(z-2y,\ z-2x,\ x+3y+y^2\right)$$

$$\text{rot}\,F = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z-2y & z-2x & x+3y+y^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(3+2y-1,\ 1-1,\ -2+2\right) = \left(2+2y,\ 0,\ 0\right)$$

Parametrizzo S

$$\psi \begin{cases} x = \rho\cos t \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}\rho\,\text{sen}\,t \\ z = \frac{1}{\sqrt{5}}\rho\,\text{sen}\,t \end{cases} \qquad \rho \in [0,1] \qquad t \in [0,2\pi].$$

$$\psi_\rho = \left(\cos t,\ \frac{2}{\sqrt{5}}\text{sen}\,t,\ \frac{1}{\sqrt{5}}\text{sen}\,t\right)$$ orientata correttamente

$$\psi_t = \left(-\rho\,\text{sen}\,t,\ \frac{2}{\sqrt{5}}\rho\cos t,\ \frac{1}{\sqrt{5}}\rho\cos t\right).$$

$$A(\rho,t) = \frac{2}{5}\rho\,\text{sen}\,t\cos t - \frac{2}{5}\rho\,\text{sen}\,t\cos t = 0$$

$$\iint_S \text{rot}\,F \cdot \nu \, d\sigma = 0$$