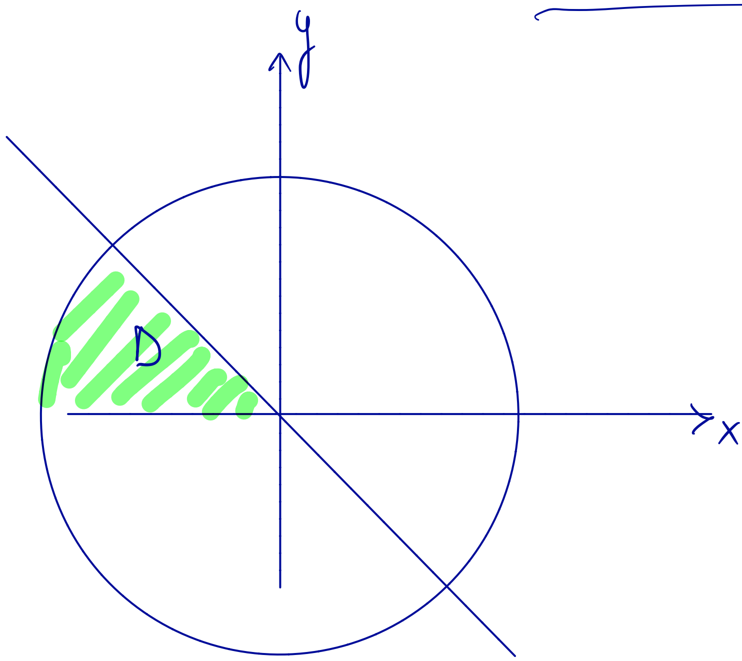
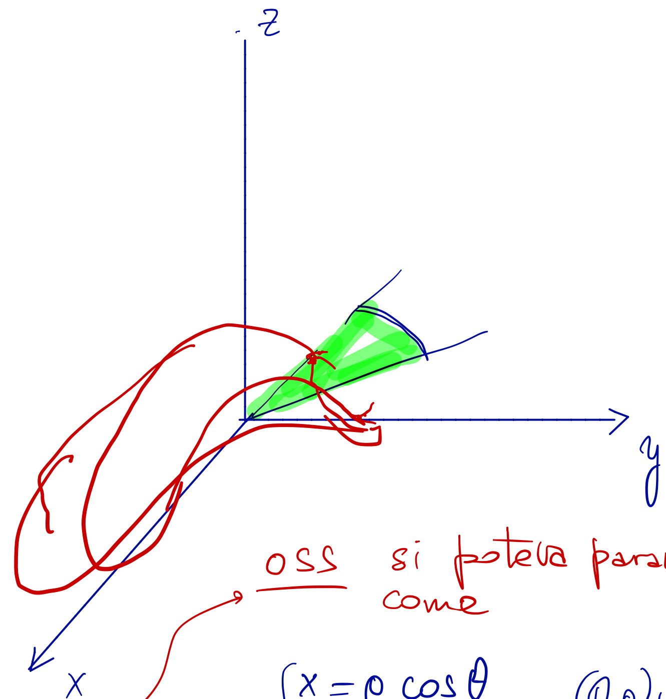
ESERCIZIO Calcolare $\displaystyle\iint_S \frac{1}{[1+4(x^2+y^2)]^3}\, d\sigma = (*)$

dove S è il grafico di $z = 2xy$,

(x,y) variano nel dominio D contenuto nei semipiani $y \geq 0$ $y \leq -x$.
delimitato dalla circonf. unitaria, dall'asse x e dalla retta $y = -x$





Parametrizziamo S

$$\varphi: \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 2xy \end{cases} \quad (x,y) \in D.$$

OSS si poteva parametrizz. come

$$\psi \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = 2\rho^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

(θ,ρ) variano come sotto

$$(*) = \iint_D \frac{1}{[1+4(x^2+y^2)]^3}\, \underbrace{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}_{= \sqrt{1+4y^2+4x^2}}\, dx\,dy = \iint_D \frac{dx\,dy}{(1+4x^2+4y^2)^{5/2}} =$$

[passando a coord. polari]

$$= \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\theta \int_0^1 d\rho\, \frac{\rho}{(1+4\rho^2)^{5/2}} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{8}\int_0^1 d\rho\, \frac{8\rho}{(1+4\rho^2)^{5/2}} = \frac{\pi}{32}\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{(1+4\rho^2)^{3/2}}\Big|_0^1 = \dots$$

$$\psi \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \\ z = 2\rho^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$ (θ, ρ) variano come sotto

$$\psi_\rho = (\cos\theta,\ \text{sen}\,\theta,\ 4\rho\cos\theta\,\text{sen}\,\theta)$$

$$\psi_\theta = (-\rho\,\text{sen}\,\theta,\ \rho\cos\theta,\ 2\rho^2(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta))$$

$$\|\psi_\rho \wedge \psi_\theta\| = \sqrt{A^2+B^2+C^2} = \sqrt{4\rho^{\cancel{4}}+\rho^2} = \rho\sqrt{1+4\rho^2}$$

$$A(\rho,\theta) = 2\rho^2\,\text{sen}\,\theta(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) - 4\rho^2\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta = -2\rho^2\,\text{sen}\,\theta$$

$$B(\rho,\theta) = -2\rho^2\cos\theta(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) - 4\rho^2\cos\theta\,\text{sen}^2\theta = -2\rho^2\cos\theta$$

$$C(\rho,\theta) = \rho$$

$$(*) = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\theta \int_0^1 d\rho\ \frac{\cancel{\rho}\sqrt{1+4\rho^2}}{(1+4\rho^2)^3} =$$ esattamente uguale a prima.

OSS. Una superficie può essere "riparametrizzata" in altri modi.

Ad esempio, la semisfera $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geq 0$, si può parametrizzare come

$$\begin{cases} x = 2\sin\theta\cos\varphi \\ y = 2\sin\theta\sin\varphi \\ z = 2\cos\theta \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{4-x^2-y^2} \end{cases} \qquad (x,y)\in\{x^2+y^2\leq 4\}$$

$$[\theta,\varphi]\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2\pi]$$

oppure

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = \sqrt{4-\rho^2} \end{cases} \qquad [\theta,\rho]\in[0,2\pi]\times[0,2]$$

Questo si può formalizzare con il concetto di "superfici equivalenti".

Si può dimostrare che tutti gli enti geometrici e gli integrali fin qui definiti non dipendono dalla rappresentazione scelta:

- versore normale
- piano tangente
- area
- integrali di superfici

Superfici orientabili (cenni). $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ regolare.
dom. regolare

In ogni punto di una superficie è possibile una doppia scelta del versore normale ν, che è definito solo a meno del segno.

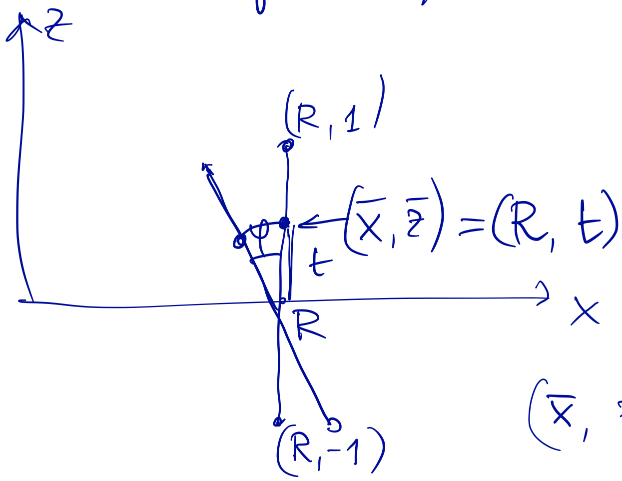
$\boxed{\text{questa parte l'ho spiegata male, la rifarò}}$

Una superficie è orientabile se il versore normale $\nu(u,v)$ può essere ~~esteso dall'interno alla frontiera di D in modo da essere continuo su tutto D~~. Questo corrisponde al fatto di avere due "facciate" chiaramente distinguibili.

Quasi tutte le superfici che conosciamo sono orientabili (grafici, cilindro, cono, sfera).

Esempio principale di superficie non orientabile: nastro di Moebius, ottenuto da un nastro avvolgendolo come se fosse un cilindro ma dopo averlo ruotato di mezzo giro.

Il nastro di Moebius ha le seguenti equazioni parametriche



$t \in [-1, 1]$

$$(\bar{x}, \bar{z}) = (R - t \,\text{sen}\,\varphi, \; t\cos\varphi)$$

dove $\varphi = \frac{\theta}{2}$.

Faccio ruotare intorno all'asse z, ottenendo

$$\begin{cases} x = \bar{x}\cos\theta = \left(R - t\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta \\ y = \bar{x}\,\text{sen}\,\theta = \left(R - t\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\right)\text{sen}\,\theta \\ z = \bar{z} = t\cos\frac{\theta}{2} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi) \\ t \in [-1, 1] \end{array}$$

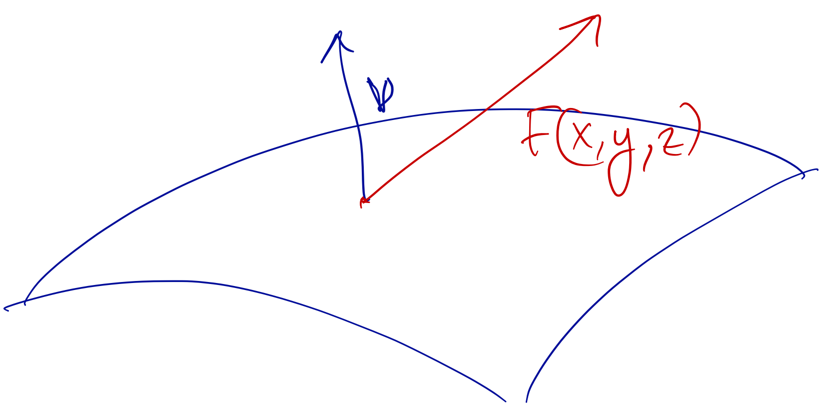
eq^{ni} parametriche del nastro di Moebius.

Noi lavoreremo solo con superfici orientabili.

Sia φ una tale superficie.
Posso scegliere una "pagina" della superficie, cioè un campo di versori normali continuo. Questo si dice scegliere un'orientazione della superficie.
Sia $\underline{F}(x,y,z)$ un campo vettoriale definito sul sostegno S di φ
Scelta un'orientazione di φ, definiamo il flusso di F attraverso φ (o attraverso il sostegno di φ) come

$$\iint_S \underline{F}(x,y,z) \cdot \underline{\nu} \, d\sigma.$$

dove $\underline{\nu}$ è il campo di versori normali scelti con l'orientazione



$$\varphi : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in D$$

Formula per il calcolo del flusso:

$$\underline{\nu} = \frac{(A(u,v),\ B(u,v),\ C(u,v))}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$$

dove A,B,C sono i minori della matrice delle derivate di φ.

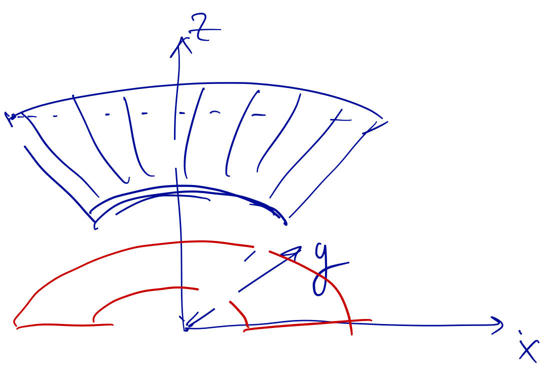
$$\iint_S \underline{F}(x,y,z)\cdot\underline{\nu}\; d\sigma . \qquad\qquad \underline{F}=(F_1,F_2,F_3)$$

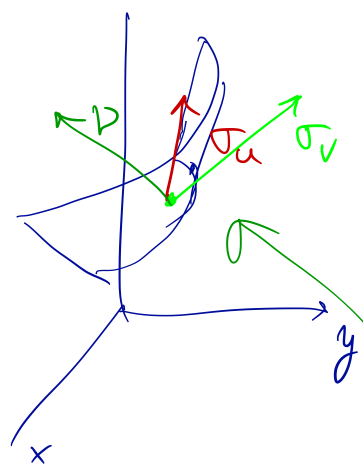
$$= \iint_D \left(F_1(\varphi(u,v))\,\frac{A(u,v)}{\cancel{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}} + F_2(\varphi(u,v))\,\frac{B(u,v)}{\cancel{\sqrt{\cdots}}} + F_3(\varphi(u,v))\,\frac{C(u,v)}{\cancel{\sqrt{\cdots}}} \right) \underbrace{\cancel{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}_{du\,dv}$$

$$= \iint_D \left[F_1(\varphi(u,v))\,A(u,v) + F_2(\varphi(u,v))\,B(u,v) + F_3(\varphi(u,v))\,C(u,v) \right] du\,dv$$

ESEMPIO Calcolare il flusso del campo vett. $\underline{F}(x,y,z) = (x, y, z^2)$ attraverso la superficie conica $\sigma(u,v) = (u\cos v,\ u \operatorname{sen} v,\ u)$ $(u,v) \in [1,2] \times [0,\pi]$ con normale orientata verso l'alto.

E' un cono in coord. cilindriche $u \sim \rho$, $v \sim \theta$.





$\sigma_u = (\cos v,\ \operatorname{sen} v,\ 1)$

$\sigma_v = (-u \operatorname{sen} v,\ u\cos v,\ 0)$

$A = -u\cos v$; $\quad B = -u \operatorname{sen} v$, $\quad C = u$

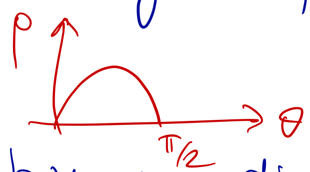
è l'orientazione desiderata? sì perché $C > 0$. (oppure si vede con la regola della mano dx)

$$\text{Flusso} = \int_1^2 du \int_0^{\pi} dv \left(\underset{F_1}{u\cos v}\cdot\underset{A}{(-u\cos v)} + \underset{F_2}{(u\,\text{sen}\,v)}\underset{B}{(-u\,\text{sen}\,v)} + \underset{F_3}{u^2}\underset{C}{u} \right)$$

$$= \int_1^2 du \int_0^{\pi} dv \left(-u^2+u^3\right) = \pi \left(\frac{u^4}{4} - \frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_{u=1}^{u=2} \ldots -$$

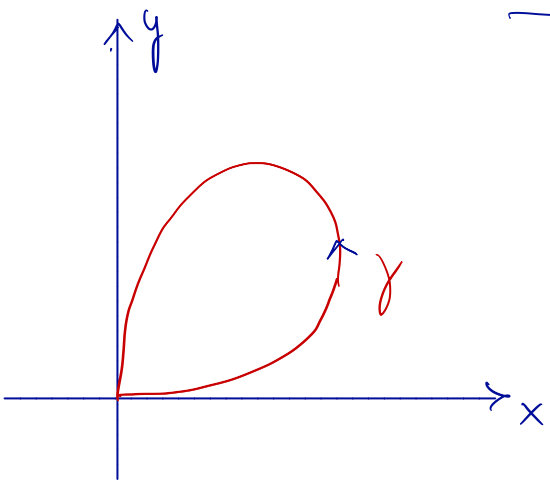
ESERCIZIO Sia γ la curva del piano xy di eq^{ne} polare

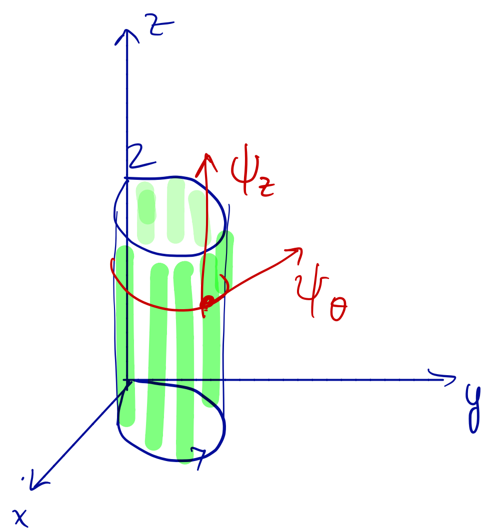
$$\rho = \text{sen}\,\theta\cos\theta = \frac{\text{sen}(2\theta)}{2} \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$



e sia S il cilindro retto avente per base γ, di altezza $h=2$, posto nel semispazio $\{z \geq 0\}$. Calcolare il flusso uscente da S del campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, 0, z^2\right)$$





Eq^{ni} parametriche di S

$$\psi \begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta = \text{sen}\,\theta\cos^2\theta \\ y = \rho(\theta)\,\text{sen}\,\theta = \text{sen}^2\theta\cos\theta \\ z = z \end{cases} \qquad [\theta, z] \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,2]$$

$$\psi_\theta = \left(\cos^3\theta - 2\,\text{sen}^2\theta\cos\theta,\ 2\,\text{sen}\,\theta\cos^2\theta - \text{sen}^3\theta,\ 0\right)$$

$$\psi_z = (0, 0, 1)$$

$A(\theta,z) = 2\,\text{sen}\,\theta\cos^2\theta - \text{sen}^3\theta$; $B(\theta,z) = -\cos^3\theta + 2\,\text{sen}^2\theta\cos\theta$; $C(\theta,z) = 0$

$A(\theta, z) = 2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta - \operatorname{sen}^3\theta$; $B(\theta, z) = -\cos^3\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta$; $C(\theta, z) = 0$

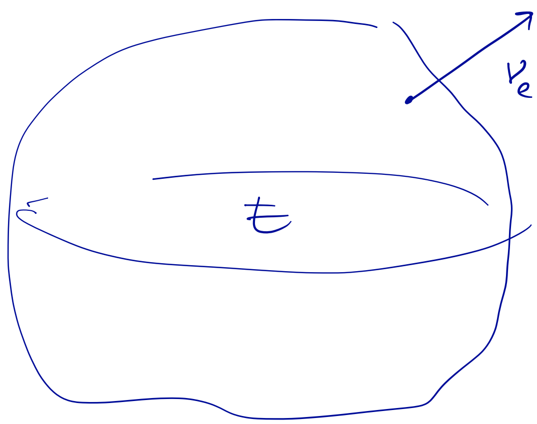
$$\text{Flusso} = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^2 dz \, \underbrace{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}_{F_1} \left(2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta - \operatorname{sen}^3\theta\right) =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \left(2\operatorname{sen}^2\theta\cos^3\theta - \operatorname{sen}^4\theta\cos\theta\right) = \quad [\operatorname{sen}\theta = t]$$

$$= 2 \int_0^1 dt \left(2t^2(1-t^2) - t^4\right) = 2\int_0^1 dt \left(2t^2 - 3t^4\right) =$$

$$= 2\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right)$$

Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ un dominio regolare. Si dimostra che ∂E è unione di un numero finito di sostegni di superfici regolari orientabili (il lato che punta verso l'esterno di E e quello che punta verso l'interno).
Stabiliamo di orientare queste superfici in modo che il versore normale sia ν_e (esterno).



Se $\underset{\sim}{F}(x,y,z) : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ campo vettoriale C^1, definiamo

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$ è una funzione scalare

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Sia E un dominio regolare di $\mathbb{R}^3$. Sia $\underline{F}(x,y,z)$ un campo vettoriale $C^1(E;\mathbb{R}^3)$. Allora

$$\underbrace{\iint_{\partial E} \underline{F} \cdot \underline{\nu_e}\, d\sigma}_{\text{flusso di } F \text{ \underline{uscente} da } \partial E} = \iiint_E \operatorname{div} F \; dx\,dy\,dz.$$