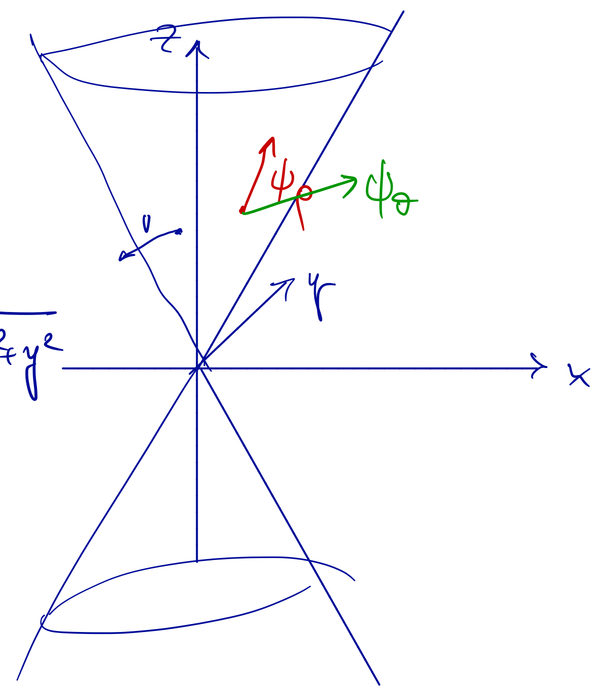
ESERCIZIO: Calcolare il versore normale esterno e il piano tg al cono $z^2 = 9x^2 + 9y^2$ nel pto $(-2\sqrt{3}, 2, 12)$.

OSS E' un cono, perché (dipendendo solo da x^2+y^2) è di rotazione intorno all' asse z. Prendo $y=0$, $x \geq 0$ per trovarne l'intersezione con il semipiano xz, $x \geq 0$. $z^2 = 9x^2$ $\quad z = \pm 3x$



1° modo $\quad z = \pm 3\sqrt{x^2+y^2}$

nel nostro caso scelgo il +.

E' una superficie grafico $z = f(x,y) = 3\sqrt{x^2+y^2}$

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases} \qquad \text{etc...}$$

2° modo In coord. cilindriche

$$\psi \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \\ z = 3\rho \end{cases}$$

Il pto $(x_0, y_0, z_0) = (-2\sqrt{3}, 2, 12)$ corrisponde a: $\rho = \rho_0 = 4 \qquad \theta = \theta_0 = \frac{5}{6}\pi$

$12 = 3\rho \Rightarrow \rho = 4$

$$\begin{cases} -2\sqrt{3} = 4\cos\theta \\ 2 = 4\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\psi_\rho = (\cos\theta, \ \text{sen}\,\theta, \ 3)$$

$$\psi_\theta = (-\rho\,\text{sen}\,\theta, \ \rho\cos\theta, \ 0)$$

$A(\rho,\theta) = -3\rho\cos\theta \qquad A(\rho_0,\theta_0) = -3\cdot4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\sqrt{3}$

$B(\rho,\theta) = -3\rho\,\text{sen}\,\theta \qquad B(\quad) = -3\cdot4\cdot\frac{1}{2} = -6$

$C(\rho,\theta) = \rho \qquad C(\rho_0,\theta_0) = 4$

$$A(\rho_0,\theta_0) = -3\cdot 4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\sqrt{3}$$
$$B(\quad) = -3\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = -6$$
$$C(\rho_0,\theta_0) = 4$$

$$\Rightarrow \nu_i = \frac{(6\sqrt{3},-6,4)}{\sqrt{108+36+16}} =$$
$$\sqrt{108+36+16} = 4\sqrt{10}$$

$$\nu_e = -\nu_i = \frac{(-3\sqrt{3},+3,-2)}{2\sqrt{10}}$$

Questo si vede o dal segno della terza componente oppure dalla regola della mano destra

<u>Piano tangente</u>: $-3\sqrt{3}\left(x+2\sqrt{3}\right)+3(y-2)-2(z-12)=0.$

<u>OSS</u> Il versore normale di una superficie è determinato a meno del segno; cambiando l'ordine dei parametri si inverte il versore normale.

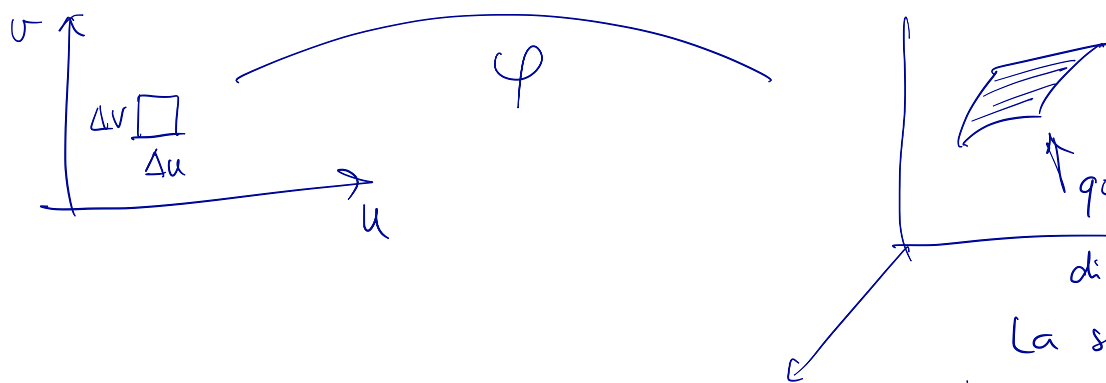
Area di una superficie.

$\underline{\varphi}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

Sia $\underline{\varphi}: D \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare ($D \subset \mathbb{R}^2$ dominio regolare)

$$\text{Area di } \varphi = \iint_D \|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\| \, du\, dv = \iint_D \sqrt{A(u,v)^2 + B(u,v)^2 + C(u,v)^2} \, du\, dv$$

Questa formula si può giustificare e rendere rigorosa.



per Δu e $\Delta v \ll 1$, questo è un parallelogramma di lati $\varphi_u \Delta u$, $\varphi_v \Delta v$.
La sua area è $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \Delta u \Delta v$.

Area di una sfera

$$\psi \begin{cases} x = R \sin\theta \cos\varphi \\ y = R \sin\theta \sin\varphi \\ z = R \cos\theta \end{cases} \qquad (\theta, \varphi) \in [0,\pi] \times [0, 2\pi]$$

$$\|\psi_u \wedge \psi_v\| = R^2 \sin\theta$$

$$\text{Area } \psi = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; R^2 \sin\theta = 2\pi R^2 \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta}_{2} = 4\pi R^2.$$

OSS Per il calcolo delle aree non vale il principio di Cavalieri.
Non posso, per esempio, calcolare l'area della sfera
Prendendo

$$\text{Area } S_r = \int_{-R}^{R} dz \text{ lungh } C_z = \int_{-R}^{R} 2\pi \sqrt{R^2 - z^2} = 2\pi \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi^2 R^2}{4} \quad ??$$

dove $C_z = \{(x,y) : (x,y,z) \in \text{sfera}$

AREA di una SUPERFICIE GRAFICO.

$$\varphi \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases} \qquad (x,y) \in D.$$

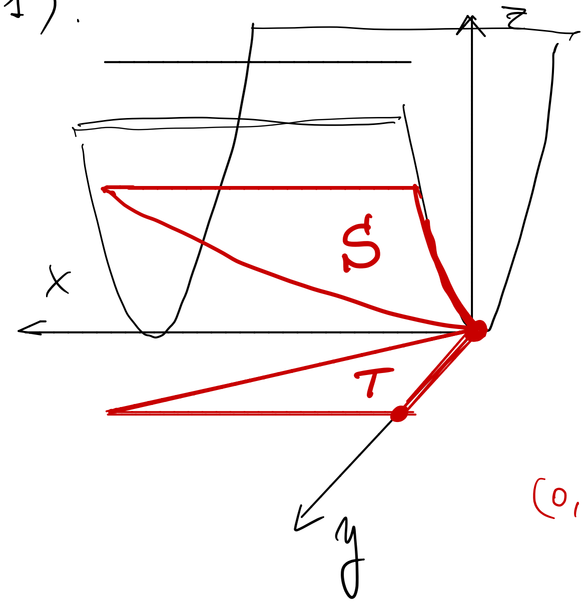
$$\|\varphi_x \wedge \varphi_y\| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

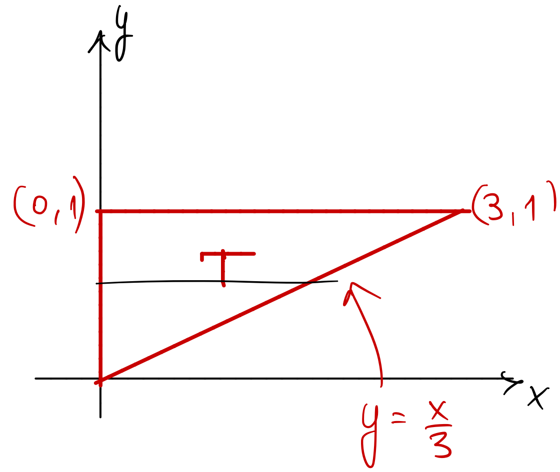
$$\text{Area } \varphi = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy$$

Per casa: ricalcolare l'area della sfera come 2 volte l'area della semisfera $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ $\quad (x,y) \in C_R$

ESERCIZIO

Calcolare l'area della parte di superficie $z = 2y^2$ che ha per proiezione sul piano xy il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(3,1)$.





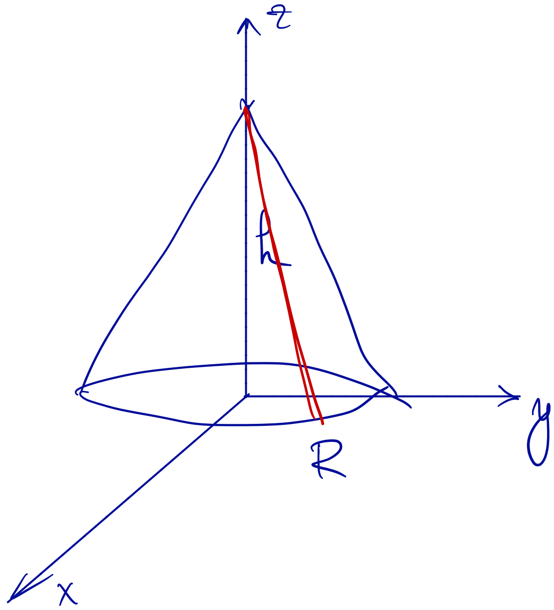
$f(x,y) = 2y^2$

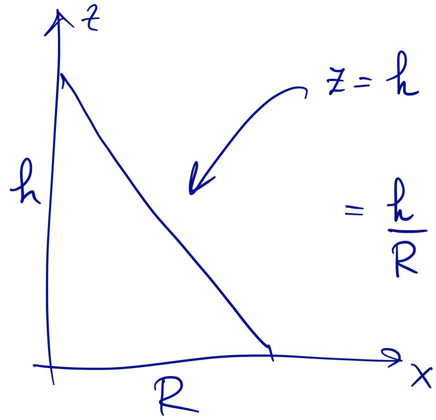
T gioca il ruolo di D

$$\text{Area } S = \iint_T \sqrt{1+16y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{3y} dx \sqrt{1+16y^2} = \int_0^1 \sqrt{1+16y^2} \cdot 3y = \text{facile, completare.}$$

ESERCIZIO Area laterale di un cono circolare retto.





$$z = h - \frac{h}{R}x = $$
$$= \frac{h}{R}(R-x)$$

Eq^{ne} del cono

$$z = \frac{h}{R}\left(R - \sqrt{x^2+y^2}\right) =$$

$$= \frac{h}{R}(R-\rho) \quad \text{in coord. cilindriche}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \\ z = \frac{h}{R}(R-\rho) \end{cases} \qquad (\rho,\theta) \in [0,R]\times[0,2\pi]$$

$$\text{Area (cono)} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R d\rho \sqrt{A^2+B^2+C^2} = 2\pi \int_0^R d\rho \, \frac{\sqrt{h^2+R^2}}{R}\,\rho =$$

$$= \frac{\cancel{2}\pi R^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\cancel{R}}\sqrt{h^2+R^2} = \pi R\sqrt{h^2+R^2}$$

come da manuale!

$$\varphi_\rho = \left(\cos\theta, \ \text{sen}\,\theta, \ -\frac{h}{R}\right)$$

$$\varphi_\theta = \left(-\rho\,\text{sen}\,\theta, \ \rho\cos\theta, \ 0\right)$$

$$A(\rho,\theta) = \frac{h}{R}\rho\cos\theta$$

$$B(\rho,\theta) = \frac{h}{R}\rho\,\text{sen}\,\theta$$

$$C(\rho,\theta) = \rho$$

$$\rightarrow \sqrt{A^2+B^2+C^2} = \sqrt{\left(\frac{h\rho}{R}\right)^2+\rho^2} =$$

$$= \frac{\rho}{R}\sqrt{h^2+R^2}$$

OSS Se $\underline{V}, \underline{W} \in \mathbb{R}^3$, si ha

$$\|\underline{V} \wedge \underline{W}\|^2 = \|\underline{V}\|^2 \|\underline{W}\|^2 - |\underline{V} \cdot \underline{W}|^2$$

Dim: un conto noioso.

Ne segue che:

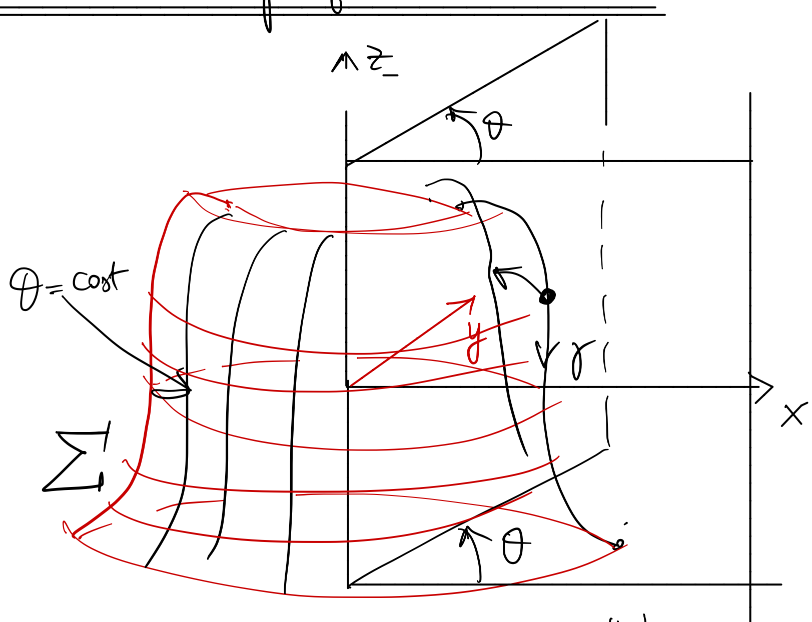
$$\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\| = \sqrt{EG - F^2} \qquad \left(= \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \right)$$

dove $E = \|\underline{\varphi}_u\|^2$, $G = \|\underline{\varphi}_v\|^2$, $F = (\underline{\varphi}_u \cdot \underline{\varphi}_v)$

Questa è una formula molto comoda, specie quando

$\underline{\varphi}_u \perp \underline{\varphi}_v \implies F \equiv 0$

Area delle superfici di rotazione



Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare del semipiano xz, $x \geq 0$

$$\gamma \begin{cases} x = \bar{x}(t) \\ z = \bar{z}(t) \end{cases} \qquad t \in [a,b]$$

Facciamo ruotare γ intorno all'asse z. Ottengo una superficie di rotazione, di eq^ni parametriche

$$\psi \begin{cases} x = \bar{x}(t) \cos\theta \\ y = \bar{x}(t) \operatorname{sen}\theta \\ z = \bar{z}(t) \end{cases} \qquad t \in [a,b] \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\varphi \quad \begin{cases} x = \bar{x}(t)\cos\theta \\ y = \bar{x}(t)\,\text{sen}\,\theta \\ z = \bar{z}(t) \end{cases} \qquad t \in [a,b] \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\underline{\varphi}_t = \left(\bar{x}'(t)\cos\theta,\ \bar{x}'(t)\,\text{sen}\,\theta,\ \bar{z}'(t)\right)$$

$$\underline{\varphi}_\theta = \left(-\bar{x}(t)\,\text{sen}\,\theta,\ \bar{x}(t)\cos\theta,\ 0\right)$$

$$E = \|\underline{\varphi}_t\|^2 = \bar{x}'(t)^2 + \bar{z}'(t)^2$$

$$G = \|\underline{\varphi}_\theta\|^2 = \bar{x}(t)^2$$

$$F = \underline{\varphi}_t \cdot \underline{\varphi}_\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \|\underline{\varphi}_t \wedge \underline{\varphi}_\theta\| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\bar{x}(t)^2\left(\bar{x}'(t)^2 + \bar{z}'(t)^2\right)} =$$

$$= \underbrace{\bar{x}(t)}_{\geq 0} \sqrt{\bar{x}'(t)^2 + \bar{z}'(t)^2}$$

$$\text{Area } \Sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b dt\ \bar{x}(t)\sqrt{\bar{x}'(t)^2 + \bar{z}'(t)^2} =$$

$$= 2\pi \int_a^b dt\ \bar{x}(t)\sqrt{\bar{x}'(t)^2 + \bar{z}'(t)^2} = 2\pi \int_\gamma x\, ds$$

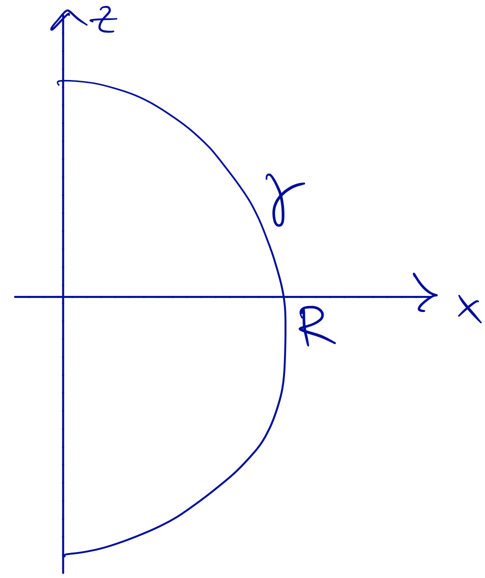
TEOREMA DI GULDINO PER LE SUPERFICI DI ROTAZIONI

Sia γ una curva regolare del semipiano xz, $x \geq 0$. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare γ di un angolo giro intorno all'asse z.

Allora $\quad \text{Area}(\Sigma) = 2\pi \int_\gamma x\, ds$

Area della sfera con Guldino

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ z = R\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$\text{Area } S_R = 2\pi \int_\gamma x \, ds =$$

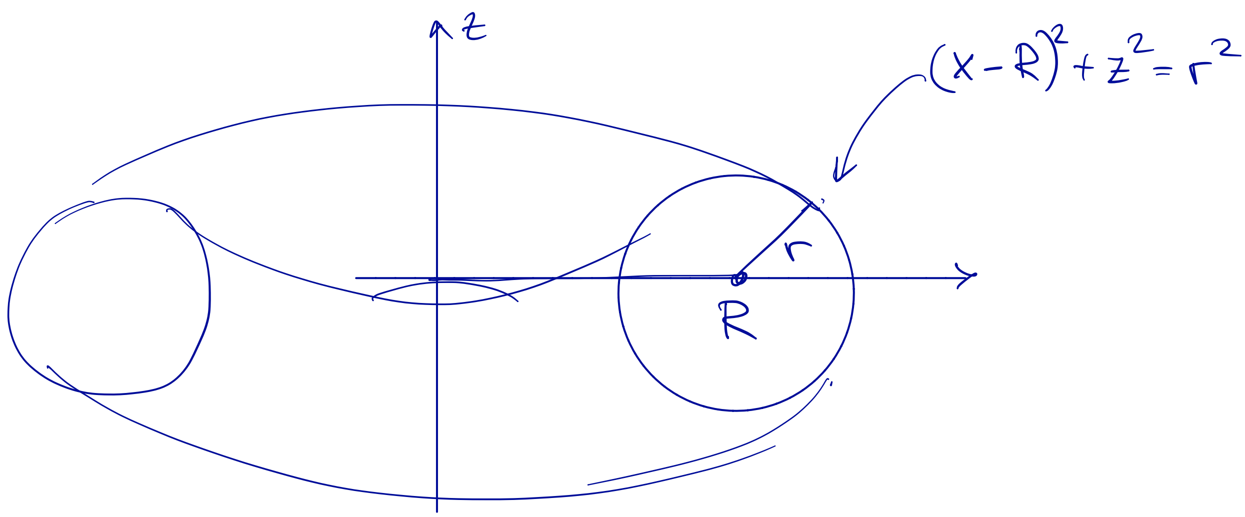
$$= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R\cos\theta \cdot R \, d\theta = 2\pi R^2 \cdot 2 = 4\pi R^2$$

Interpretazione geometrica.

$$\text{Area } \Sigma = 2\pi \int_\gamma x \, ds = 2\pi \, L(\gamma) \underbrace{\frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma x \, ds}_{x_B \,=\, \text{ascissa del baricentro di } \gamma} = \overbrace{(2\pi x_B)}^{\text{lungh. della circonferenza percorsa dal baric. di } \gamma \text{ intorno all'asse } z} L(\gamma)$$

Esempio per casa: area laterale di un cono.

Esempio: area del toro. (ciambella)



$$\text{Area} = 2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 R r$$

Esercizio: Equazione cartesiana del toro

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right)^2+z^2=r^2 \qquad (\rho-R)^2+z^2=r^2$$

$$x^2+y^2+R^2-2R\sqrt{x^2+y^2}+z^2=r^2 \qquad \rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$x^2+y^2+R^2+z^2-r^2=2R\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\left(\qquad\qquad\right)^2=4R^2(x^2+y^2)$$

Rappr. parametrica

$$\bar{x}=R+r\cos\varphi$$
$$\bar{z}=r\,\text{sen}\,\varphi \qquad \varphi\in[0,2\pi]$$

$$\psi \qquad \begin{cases} x=\bar{x}\cos\theta=(R+r\cos\varphi)\cos\theta \\ y=\bar{x}\,\text{sen}\,\theta=(\qquad\qquad)\,\text{sen}\,\theta \\ z=\bar{z}=r\,\text{sen}\,\varphi \end{cases} \qquad (\varphi,\theta)\in[0,2\pi]^2$$

Integrali di superficie

Sia $\underline{\varphi}$ una superficie regolare $\quad \underline{\varphi} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

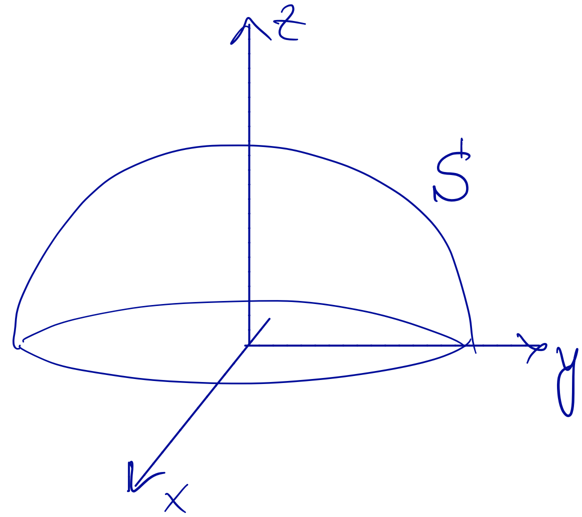
$$(u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

Sia $f(x,y,z)$ una funzione continua definita sul sostegno S di φ $\left(= Im(\varphi) = \varphi(D)\right)$

$$\iint_S f \, d\sigma = \iint_D f(\underline{\varphi}(u,v)) \, \| \underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v \| \, du\, dv$$

$$f(\underline{\varphi}(u,v)) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

Baricentro di una semisfera



$$x_B = \frac{1}{\text{Area } S} \iint_S x \, d\sigma = 0 = y_B$$

$$z_B = \frac{1}{\text{Area } S} \iint_S z \, d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \; R\cos\theta \, R^2 \operatorname{sen}\theta =$$

$$\psi \begin{cases} x = R \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y = R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$

$$(\theta, \varphi) \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi]$$

$$= \frac{2\pi R^3}{2\pi R^2} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \frac{R}{2}$$