FORMULE DI GAUSS-GREEN

Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare. Sia $f(x,y)$ una funzione di classe $C^1(E)$. Allora

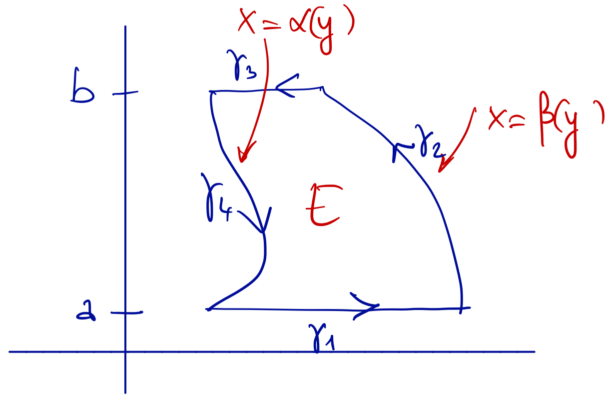
1) $$\iint_E \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\,dy = \int_{\partial^+ E} f\, dy$$

2) $$\iint_E \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\,dy = -\int_{\partial^+ E} f\, dx.$$

dove $\partial^+ E$ è la frontiera di E orientata positivamente.

<u>DIM</u> Dimostriamo la (1) per un dominio regolare normale rispetto alla y

$$E = \{ (x,y) : \quad a \le y \le b \,, \quad \alpha(y) \le x \le \beta(y) \}$$

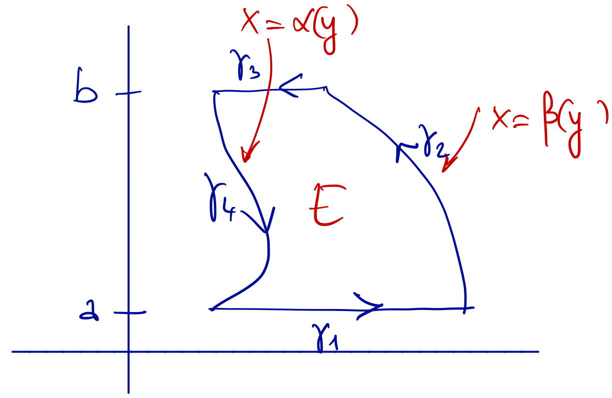


$$\iint_E \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\,dy =$$

$$= \int_a^b dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} dx \, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$$

$$= \int_a^b dy \; f(x,y)\Big|_{x=\alpha(y)}^{x=\beta(y)} = \int_a^b dy \left[f(\beta(y),y) - f(\alpha(y),y) \right]$$

$$\int_{\partial^+ E} f\, dy = \underbrace{\cancel{\int_{\gamma_1} f\, dy}}_{=0} + \int_{\gamma_2} f\, dy + \underbrace{\cancel{\int_{\gamma_3} \cdots}}_{=0} + \int_{\gamma_4}$$



$$\int_{\partial^+E} f\,dy = \underbrace{\cancel{\int_{\gamma_1} f\,dy}}_{=0} + \int_{\gamma_2} f\,dy + \underbrace{\cancel{\int_{\gamma_3} \cdots}}_{=0} + \int_{\gamma_4}$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = \beta(t) \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [a,b]$$

$$\int_{\gamma_2} f\,dy = \int_a^b f(\beta(t), t)\, 1\, dt$$

$$\gamma_4^- : \begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [a,b]$$

$$\int_{\gamma_4} f\,dy = - \int_a^b f(\alpha(t), t) \cdot 1\, dt$$

$$\Rightarrow \int_{\partial^+E} f\,dy = \int_a^b \left[f(\beta(t), t) - f(\alpha(t), t) \right] dt$$

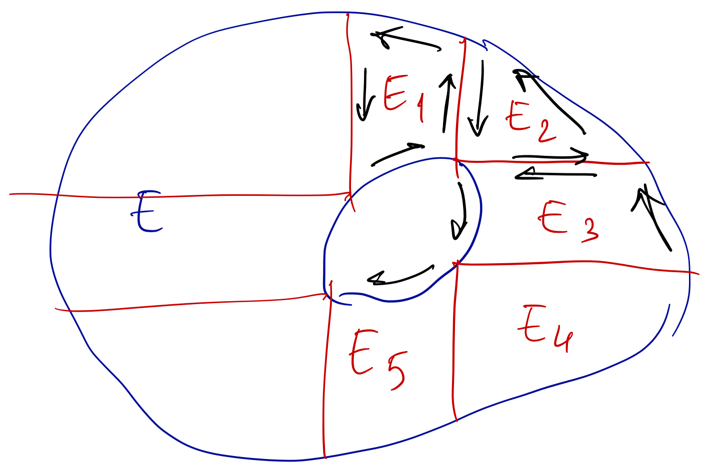
Confrontando 1° e 2° membro, abbiamo la tesi.

La dim della (1) per insiemi del tipo

$$E = \{(x,y) : a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$$

è leggermente più complicata e non la facciamo.

Se E è "composito" con insiemi normali



G-G applicato ai domini E_i

$$\iint_E \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{E_i} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial^+ E_i} f\,dy =$$

Oss I tratti di separazione tra i vari sottodomini sono percorsi due volte in versi opposti e non danno contributo

$$= \int_{\partial^+ E} f\,dy.$$

OSS. Le formule di Gauss-Green e il teorema di Stokes possono essere usate per calcolare aree mediante integrali curvilinei.

$$\text{Area}(E) = \iint_E 1 \, dx\,dy$$

Ricordo Stokes: $$\iint_E (B_x - A_y)\,dx\,dy = \int_{\partial^+ E} A\,dx + B\,dy$$

Cerco $A(x,y)$, $B(x,y)$ t.c. $B_x - A_y = 1$.

Varie possibilità: $A \equiv 0, \quad B(x,y) = x$

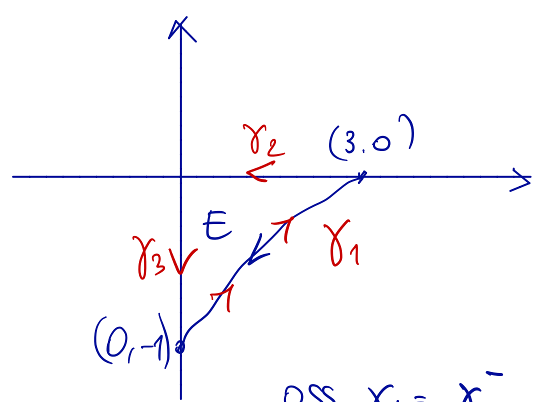
$B \equiv 0, \quad A(x,y) = -y$

$A(x,y) = -\frac{y}{2}, \quad B(x,y) = \frac{x}{2}$.

$$\Rightarrow \text{Area}(E) = \int_{\partial^+ E} x\,dy = -\int_{\partial^+ E} y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial^+ E} (-y)\,dx + x\,dy$$

ESEMPIO Sia γ la curva $\begin{cases} x(t) = 3\cos^2 t \\ y(t) = -\operatorname{sen}^3 t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Calcolare mediante un integrale curvilineo l'area della regione E delimitata da γ e dagli assi coordinati.



OSS $\gamma_1 = \gamma^-$

$$\text{Area } E = \int_{\partial^+ E} x\,dy = \int_{\gamma_1} x\,dy + \cancel{\int_{\gamma_2} \ldots} + \cancel{\int_{\gamma_3} \ldots} =$$

$dy = 0 \qquad x = 0$

$$= -\int_{\gamma} x\,dy = -\int_0^{\pi/2} 3\cos^2 t\,(-3\operatorname{sen}^2 t)\cos t\,dt =$$

$$= +9\int_0^{\pi/2} \cos^3 t \operatorname{sen}^2 t\,dt =$$

$$\text{Area } E = +9\int_0^{\pi/2} \cos^3 t \,\mathrm{sen}^2 t \, dt = 9\int_0^{\pi/2} (1-\mathrm{sen}^2 t)\,\mathrm{sen}^2 t \cos t \, dt =$$

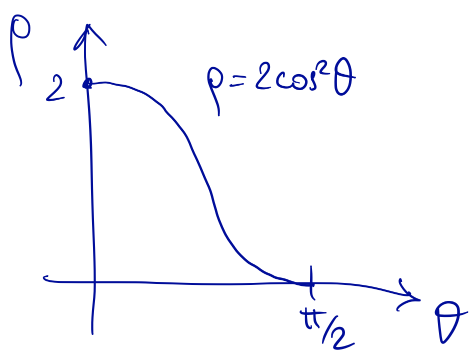
$\mathrm{sen}\, t = z$

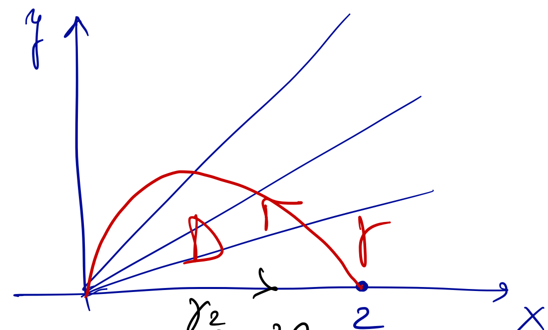
$\cos t \, dt = dz$

$$= 9\int_0^1 (1-z^2) z^2 \, dz = 9\int_0^1 (z^2 - z^4)\, dz =$$

$$= 9\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$

ESERCIZIO: Disegnare la curva γ di equazione polare $\rho = 2\cos^2\theta$ $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e, usando Stokes, calcolare $\iint_D x \, dxdy$ dove D è il dominio delimitato da γ e dall'asse x.





Calcolo diretto:
$$\iint_D x \, dx\,dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos^2\theta} d\rho \; \rho\cos\theta\cdot\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta \; 4\cos^4\theta = ----$$

$$\gamma : \begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta = 2\cos^3\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta = 2\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Tramite Stokes.

$$\iint_D x \, dx\,dy = \int_{\partial^+ D} \frac{x^2}{2}\, dy = \int_\gamma \frac{x^2}{2}\, dy + \cancel{\int_{\gamma_2} \frac{x^2}{2}\, dy} =$$

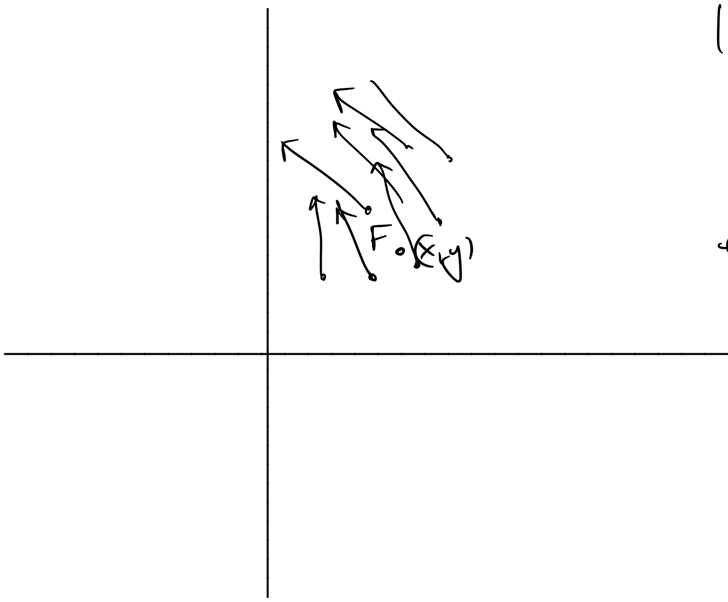
Cerco $A(x,y)$, $B(x,y)$ t.c. $B_x - A_y = x$.

Per esempio $A \equiv 0$, $B(x,y) = \frac{x^2}{2}$

porre $\mathrm{sen}\,\theta = z$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 4\cos^6\theta \left(2\cos^3\theta - 4\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta\right) d\theta = 4\int_0^{\pi/2} \cos^9\theta \, d\theta - 8\int_0^{\pi/2} \cos^7\theta\,\mathrm{sen}^2\theta \, d\theta$$

Interpretazione geometrica del rotore di un campo F.

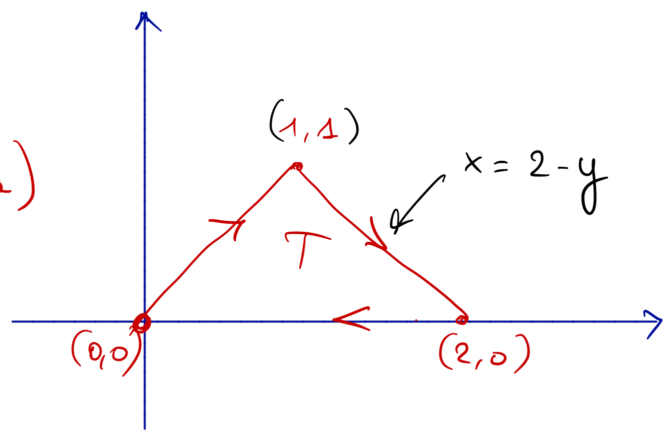


Interpretiamo F come il campo delle velocità di un fluido.
Nel pto (x,y) poniamo una trottola e vediamo se essa viene messa in rotazione in senso antiorario $(\text{rot}\, F_{(x,y)} > 0)$, orario $(\text{rot}\, F < 0)$ oppure non ruota $\text{rot}\, F(x,y) = 0$

ESERCIZIO Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma (x^2 - xy)\,dx + (xy - y^2)\,dy$$

dove γ è la frontiera, percorsa in verso orario, del triangolo T di vertici $(0,0), (2,0), (1,1)$.



Si può fare il calcolo diretto (es. per casa)

Oppure si può usare Stokes

$$\int_\gamma \underbrace{(x^2 - xy)}_{A}\,dx + \underbrace{(xy - y^2)}_{B}\,dy = -\iint_T (B_x - A_y)\,dx\,dy =$$

$$= -\iint_T (y + x)\,dx\,dy - \int_0^1 dy \int_y^{2-y} dx\,(y + x) =$$

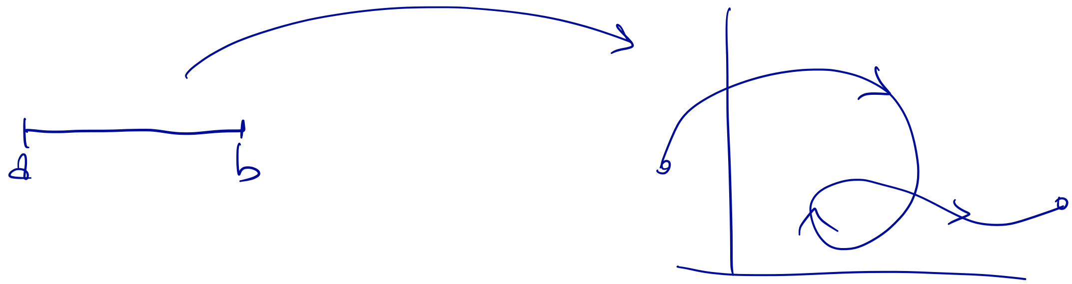
$$= -\int_0^1 dy \left[y(2-2y) + \frac{1}{2}\left[(2-y)^2 - y^2\right]\right] = -\int_0^1 dy \left(2y - 2y^2 + \frac{1}{2}\left[4 - 2y + \cancel{y^2} - \cancel{y^2}\right]\right) =$$

$$= -\int_0^1 dy\,(y - 2y^2 + 2) = - -$$

SUPERFICI REGOLARI

<u>Def di curva regolare</u> : $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$x(t), y(t)$ di classe $C^1([a,b])$, $\underline{\gamma}'(t) \neq 0$ $x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$
$\forall t \in [a,b]$.



<u>Superficie regolare</u>

$\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ D dominio regolare di $\mathbb{R}^2$

$(u,v) \longmapsto \underline{\varphi}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

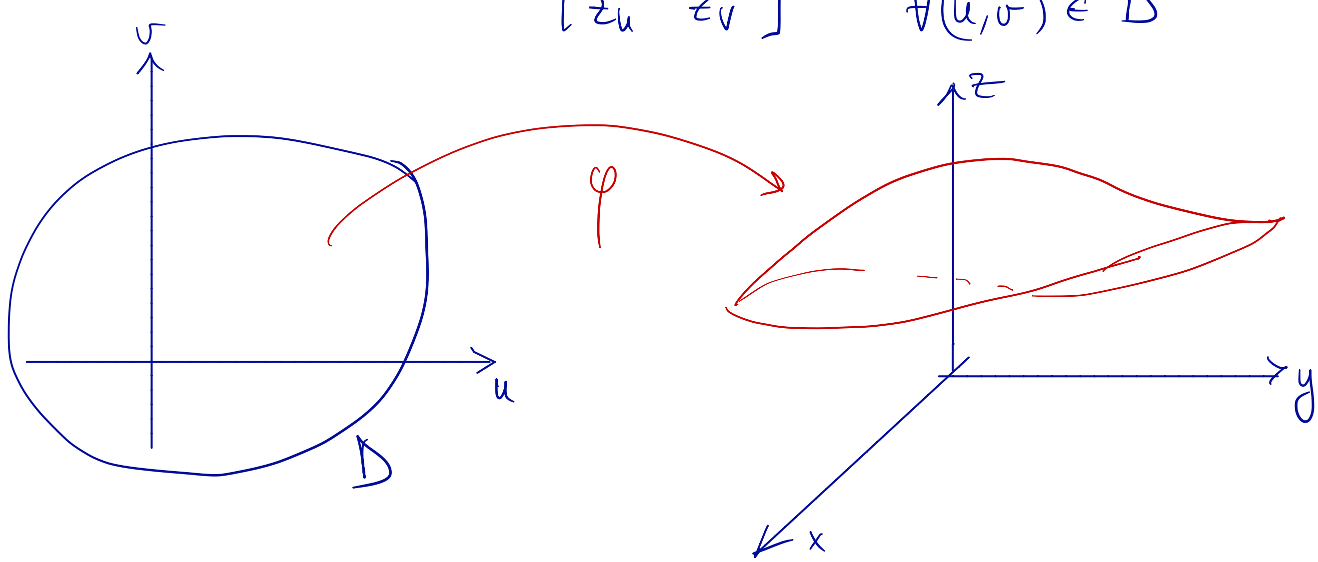
$x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ di classe $C^1(D)$

$\underline{\varphi}$ iniettiva in $\mathring{D} = \{$ punti interni a $D\}$

+ condizione di regolarità :

$J_\varphi(u,v) = \left[\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}\right] = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix}$ deve avere rango 2

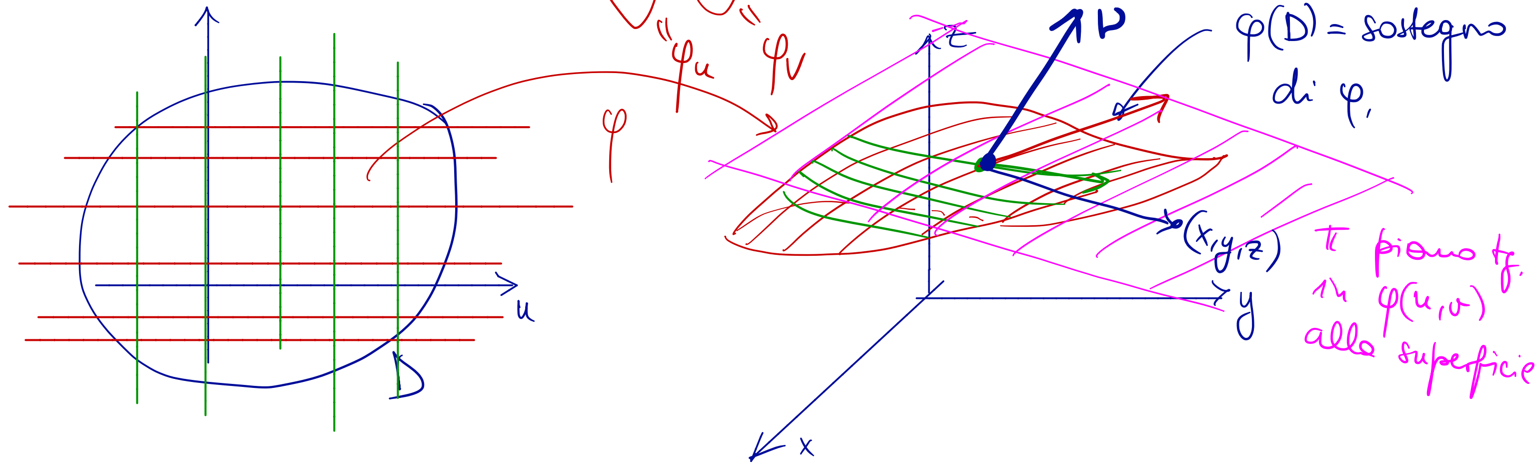
$\forall (u,v) \in \mathring{D}$



+ condizione di regolarità:

$$J_\varphi(u,v) = \left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}\right] = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{matrix}}_{\varphi_u} & \underbrace{\begin{matrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{matrix}}_{\varphi_v} \end{bmatrix}$$ deve avere rango 2 $\forall (u,v) \in \mathring{D}$

cioè almeno uno dei minori di ordine 2 estratti dalla matrice ha det $\neq 0$.



La condizione di regolarità ci assicurerà l'esistenza di versore normale e piano tangente a ogni punto del sostegno di φ

Le curve "coordinate" $\gamma(u) = \varphi(u, v_0)$ sono effettivamente curve di classe C^1, e sono regolari in quanto $\gamma'(u) = \varphi_u(u, v_0) \neq 0$ per la cond^{ne} di regolarità

Analogamente per le curve $\gamma(v) = \varphi(u_0, v)$

Inoltre, $\forall (u,v) \in \mathring{D}$ $\varphi_u(u,v)$ e $\varphi_v(u,v)$ non sono paralleli

I vettori $\varphi_u(u,v)$, $\varphi_v(u,v)$ individuano un piano, che è il piano tangente

Vediamo come.

$$J_\varphi(u,v) = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix}$$ ha rango 2, quindi, se poniamo

$$A(u,v) = \det \begin{bmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} = y_u z_v - y_v z_u$$

$$B(u,v) = -\det \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} = z_u x_v - z_v x_u$$

$$C(u,v) = \det \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} = x_u y_v - x_v y_u$$

deve essere $A(u,v)$, $B(u,v)$, $C(u,v)$ non contemporaneamente nulli,

cioè $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. $\forall (u,v) \in \mathring{D}$.

$\underbrace{\underline{\varphi_u} \wedge \underline{\varphi_v}}_{\neq 0}$ ortogonale a $\underline{\varphi_u}$ e a φ_v.

definiamo il versore normale $\underline{\nu}(u,v) = \dfrac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(u,v)$.

$$\underline{\varphi_u} \wedge \underline{\varphi_v} = \big(A(u,v), B(u,v), C(u,v)\big) \neq 0.$$

$$\begin{matrix} \underline{V} = (V_1, V_2, V_3) \\ \underline{W} = (W_1, W_2, W_3) \end{matrix} \Longrightarrow \underline{V} \wedge \underline{W} = (V_2 W_3 - V_3 W_2,\ V_3 W_1 - V_1 W_3,\ V_1 W_2 - V_2 W_1)$$

$$\begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{pmatrix}$$

$$\nu = \frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$ versore normale

$$\underline{\nu} = \frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$ versore normale

Piano tangente alla superficie $\Sigma = \varphi(D)$ nel pto

$(x_0, y_0, z_0) = \varphi(u_0, v_0)$

Sono i punti (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ t.c.

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \perp \underline{\nu}$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \perp (A, B, C)$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (A, B, C) = 0$$

$$\boxed{(x - x_0) A + (y - y_0) B + (z - z_0) C = 0.}$$ eq^{ne} del piano tg.

ESEMPI.

1) Superfici grafico

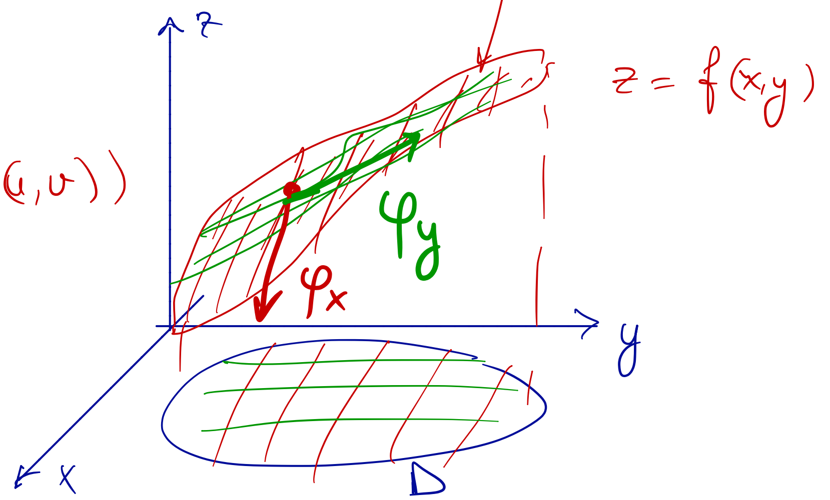
$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1.

In questo caso

$\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

dove

$$\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = f(u,v) \end{cases}$$

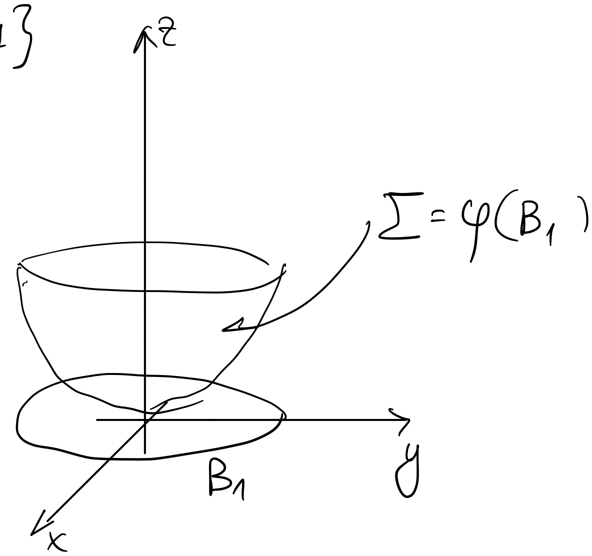


$$J_\varphi(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x(u,v) & f_y(u,v) \end{bmatrix}$$

$\underline{\text{oss}}$. il rango è 2 perché $C(u,v) = 1$.

$z = x^2 + y^2 \qquad (x,y) \in B_1 = \{x^2+y^2 \leq 1\}$

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2+y^2 \end{cases} \qquad (x,y) \in B_1.$$



Per una sup. grafico

$$\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = f(u,v) \end{cases}$$

$$J_\varphi(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x(u,v) & f_y(u,v) \end{bmatrix}$$

$$A(u,v) = -f_x(u,v) \; ; \quad B(u,v) = -f_y(u,v) \; ; \quad C(u,v) = 1.$$

$$\nu = \frac{\left(-f_x(x_0,y_0), -f_y(x_0,y_0), 1\right)}{\sqrt{1 + f_x(x_0,y_0)^2 + f_y(x_0,y_0)^2}}$$

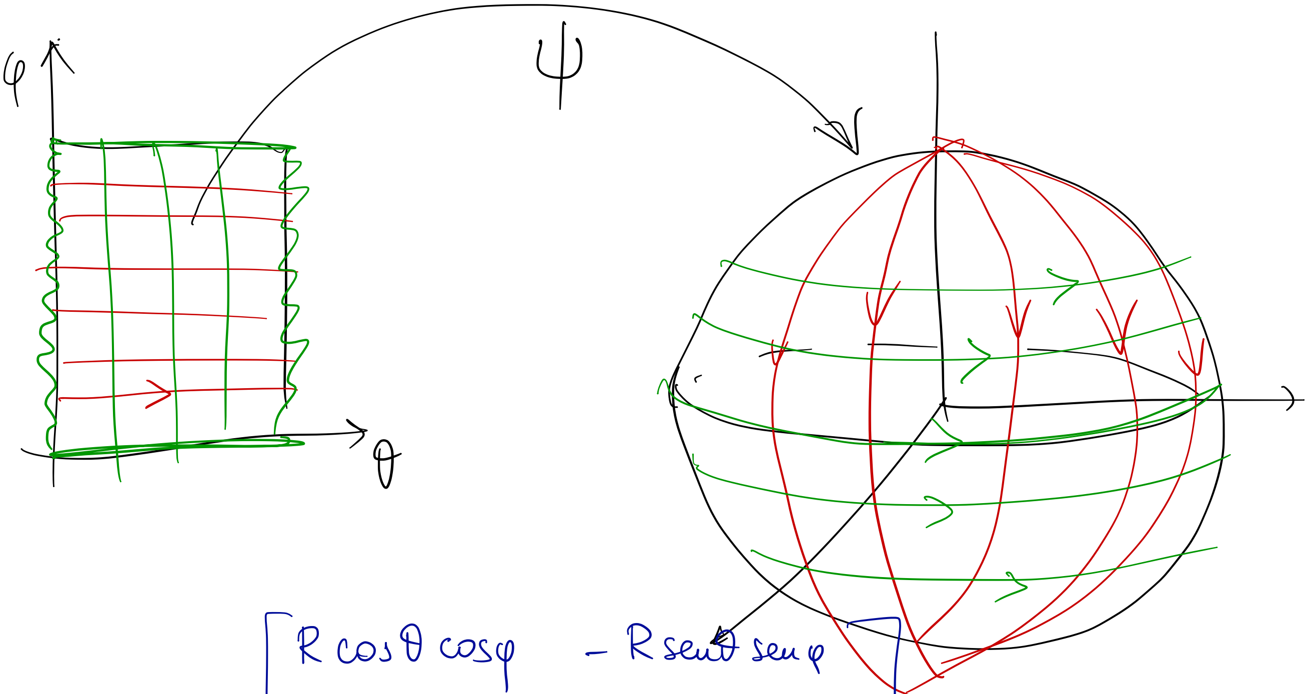
Piano tg al grafico nel pto $\left(x_0, y_0, f(x_0,y_0)\right)$

$$-(x - x_0)\, f_x(x_0,y_0) - (y - y_0)\, f_y(x_0,y_0) + z - f(x_0,y_0) = 0$$

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$ come da vecchi ricordi!

ESEMPIO: Sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio R.

$$\Psi : \begin{cases} x(\theta,\varphi) = R \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y(\theta,\varphi) = R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z(\theta,\varphi) = R\cos\theta \end{cases} \qquad (\theta,\varphi) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$$



$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\theta,\varphi)}(\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} R\cos\theta\cos\varphi & -R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ R\cos\theta\operatorname{sen}\varphi & R\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ -R\operatorname{sen}\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(\theta,\varphi) = R^2 \operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi$$

$$B(\theta,\varphi) = -R^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\varphi$$

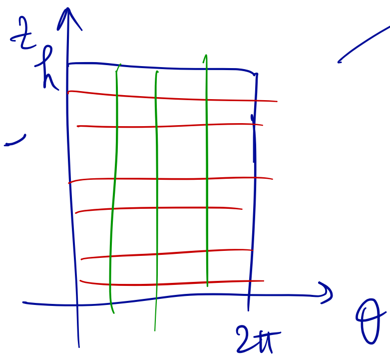
$$C(\theta,\varphi) = R^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos^2\varphi + R^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}^2\varphi = $$
$$= R^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

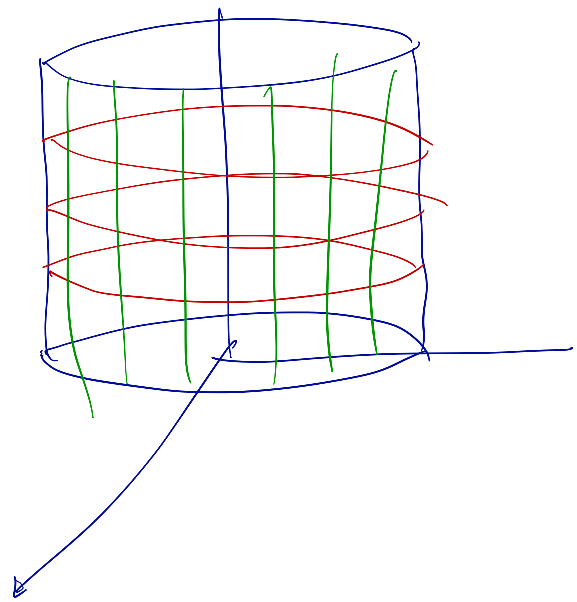
$$A^2+B^2+C^2 = R^4\Big[\overbrace{\operatorname{sen}^4\theta\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^4\theta\operatorname{sen}^2\varphi}^{\operatorname{sen}^4\theta} + \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\Big] =$$
$$= R^4\left[\operatorname{sen}^2\theta\right] \qquad \sqrt{A^2+B^2+C^2} = R^2\operatorname{sen}\theta$$

Cilindro circolare retto

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, h]$$

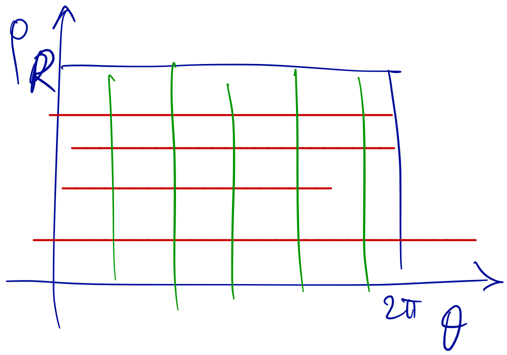


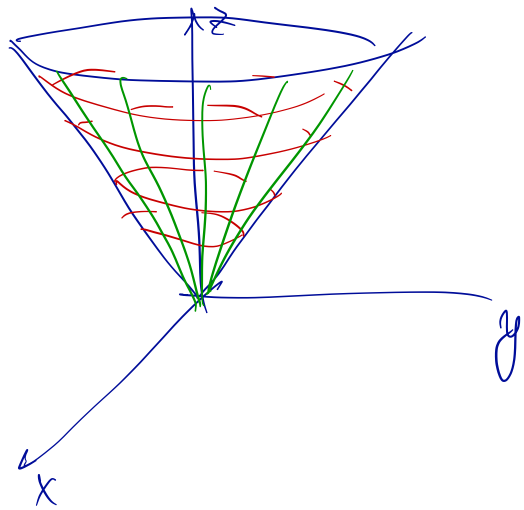


$A = ?$
$B = ?$
$C = ?$

Cono circolare retto.

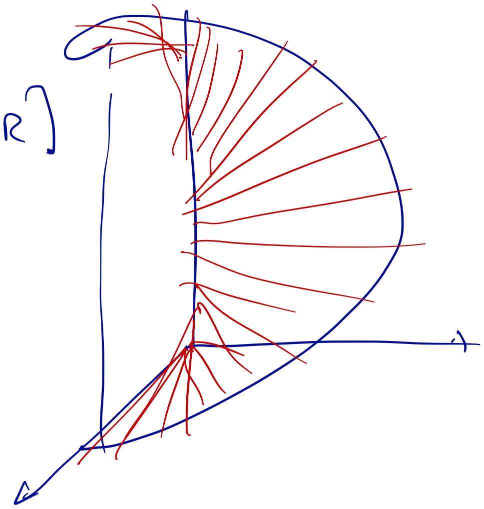
$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \\ z = a\rho \end{cases} \qquad (\theta,\rho) \in [0,2\pi] \times [0,R]$$





Elicoide

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \\ z = a\theta \end{cases} \qquad (\theta,\rho) \in [0,2\pi]\times[0,R]$$



Esercizio: verificare che è una sup. regolare