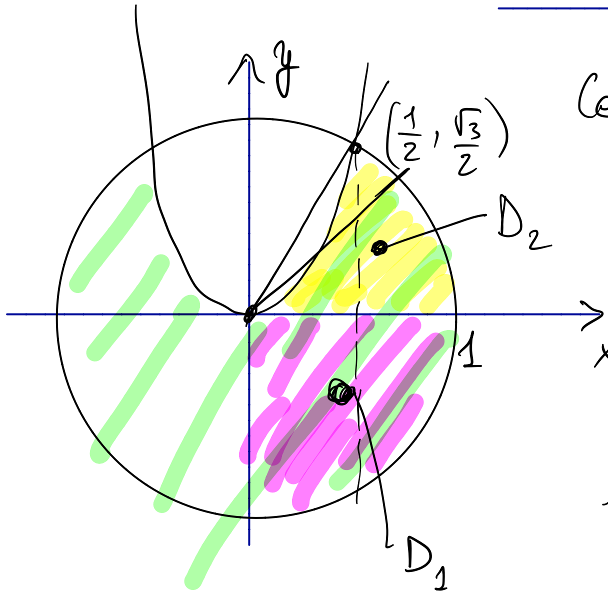
ESERCIZIO: Calcolare $\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, $(*)$ dove

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2\le 1, \quad y \le 2\sqrt{3}x^2\}$$



Cerco l'intersezione delle due curve.

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y = 2\sqrt{3}x^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{2\sqrt{3}} + y^2 = 1$$

$$2\sqrt{3}\,y^2 + y - 2\sqrt{3} = 0$$

$$y = \frac{-1+\sqrt{1+48}}{4\sqrt{3}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

In coord. cartesiane sarebbe

$$(*) = 2\int_0^{1/2} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{3}x^2} dy \sqrt{x^2+y^2} + 4\int_{1/2}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \sqrt{x^2+y^2}$$

non è il modo più semplice:

In coord. polari:

$$(*) = 2\underbrace{\int_{-\pi/2}^{0} d\theta \int_0^1 d\rho\, \rho^2}_{\text{immediato}} + 2\boxed{\int_0^{\pi/3} d\theta \int_{\frac{\operatorname{sen}\theta}{2\sqrt{3}\cos^2\theta}}^{1} d\rho\, \rho^2} =: I_1$$

$$y = 2\sqrt{3}x^2 \Longrightarrow \rho\operatorname{sen}\theta = 2\sqrt{3}\rho^2\cos^2\theta \Longrightarrow \rho = \frac{\operatorname{sen}\theta}{2\sqrt{3}\cos^2\theta}$$

$$I_1 = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/3} d\theta \left(1 - \frac{(\operatorname{sen}\theta)^3}{(2\sqrt{3}\cos^2\theta)^3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \int_0^{\pi/3} d\theta\, \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{24\sqrt{3}\cos^6\theta}\right)$$

$$\int_0^{\pi/3} d\theta \, \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos^6\theta} = \int_0^{\pi/3} d\theta \, \frac{(1-\cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta}{\cos^6\theta} =$$

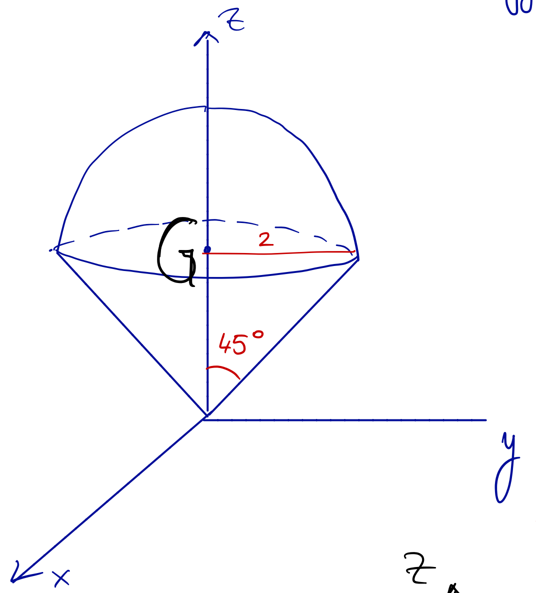
$$\boxed{\cos\theta = t}$$

$$-\operatorname{sen}\theta \, d\theta = dt$$

$$= \int_{1/2}^{1} \frac{1-t^2}{t^6}\, dt = \int_{1/2}^{1} \left(\frac{1}{t^6} - \frac{1}{t^4}\right) dt$$ immediato.

ESERCIZIO

Calcolare il volume e il baricentro del "cono gelato" disegnato in figura sapendo che l'angolo al vertice è di 45°, e il raggio della semisfera è pari a 2.

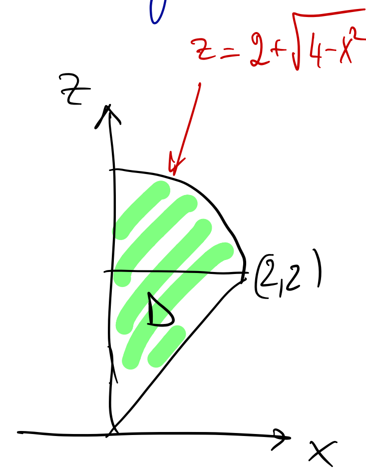


1°: volume

Il solido è di rotazione intorno all'asse z
Si potrebbe calcolare con Guldino
ma è fatto da solidi elementari

$$2\pi \iint_D x \, dx\, dy$$

$$\text{vol } G = \frac{4\pi \cdot 2}{3} + \frac{2}{3}\pi \cdot 8 = 8\pi$$



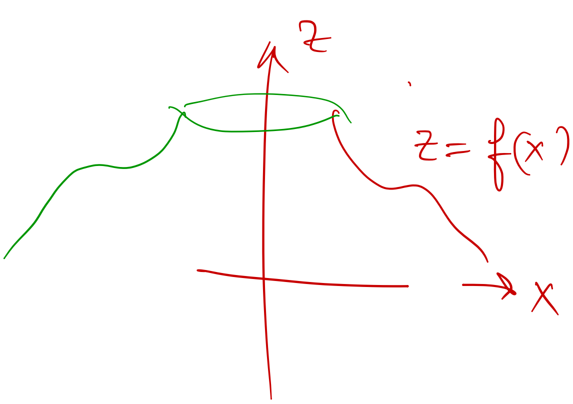
2°) baricentro.

$x_B = y_B = 0$ per simmetria.

$$z_B = \frac{1}{8\pi} \iiint_G z \, dx\,dy\,dz = \text{[coord. cilindriche]}$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 d\rho\, \rho \int_\rho^{2+\sqrt{4-\rho^2}} dz \; z$$

In coord cilindriche il cono è $z = \rho$
la sfera è
$z = 2 + \sqrt{4-\rho^2}$



$z = f(x) \Rightarrow$ ruotando diventa $z = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

Eq^{ne} del cono ottenuto facendo ruotare $z = x$ intorno all'asse z:

$$z = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$z_B = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 d\rho\, \rho \int_\rho^{2+\sqrt{4-\rho^2}} dz\; z = \frac{2\pi}{8\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 d\rho\; \rho \left[\left(2+\sqrt{4-\rho^2}\right)^2 - \rho^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^2 \rho \left[4 + 4\sqrt{4-\rho^2} + 4 - \rho^2 - \rho^2 \right] d\rho \quad = \text{immediato perché}$$

$\int \rho \sqrt{4-\rho^2}\, d\rho$ si risolve ponendo $4-\rho^2 = t$

<u>Esercizio per casa:</u> provare a calcolarlo in coord. sferiche.

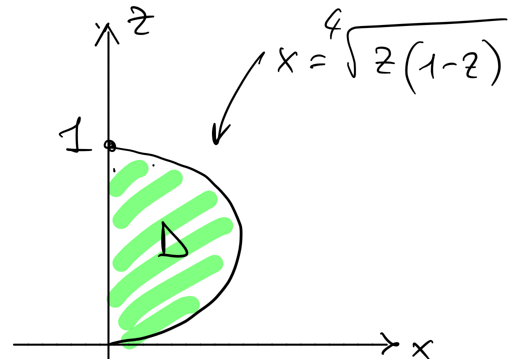
ESERCIZIO Calcolare il volume di

$$\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 \le \sqrt{z(1-z)}\}$$

Se fosse $\Omega' = \{x^2+y^2 \le \sqrt{z(1-z)}\}$, sarebbe di rotazione intorno all'asse z (dipende solo da x^2+y^2)

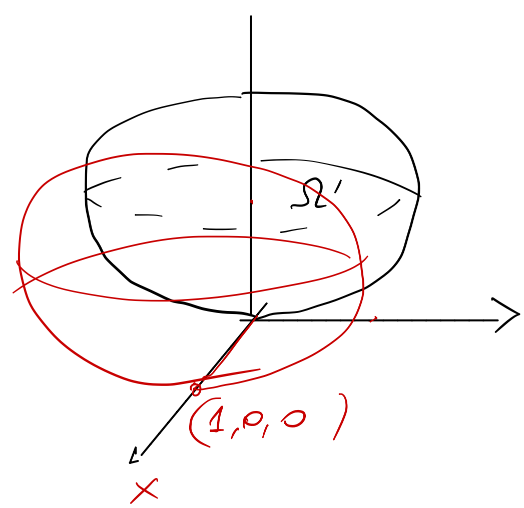
Per capire come è fatto Ω', ne faccio l'intersezione con il semipiano xz, $x \ge 0$.

$$x^2 = \sqrt{z(1-z)} \quad \underset{x\ge 0}{\Longrightarrow} \quad x = \sqrt[4]{z(1-z)}$$



Ω' è ottenuto facendo ruotare D intorno all'asse z

$$\mathrm{vol}\,\Omega' = [\text{Guldino}] = 2\pi \iint_D x \, dx\,dz =$$



$$= 2\pi \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt[4]{z(1-z)}} dx \; x =$$

$$= \pi \int_0^1 dz \sqrt{z-z^2} =$$

$$= \pi \int_0^1 dz \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - z + z^2\right)} =$$

$$\int \sqrt{1-t^2}$$

$$= \pi \int_0^1 dz \sqrt{1/4 - \left(z-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 dz \sqrt{1-(2z-1)^2} = \frac{\pi}{4}\int_{-1}^1 dt \sqrt{1-t^2} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{2} =$$

$2z-1=t$ $\quad$ $2dz = dt$ $\quad$ per parti

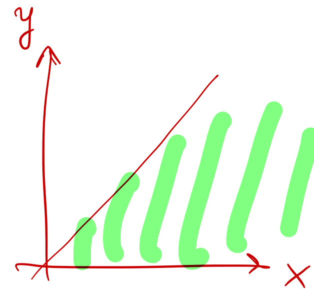
Ω è ottenuto da Ω' traslando Ω' del vettore $(1,0,0)$

$\mathrm{vol}\,\Omega' = \mathrm{vol}\,\Omega$.

ESERCIZIO Dato $D=\{(x,y,z): 0\le z\le 8-(x^2+y^2)^{3/2}\}$, trovarne il volume.

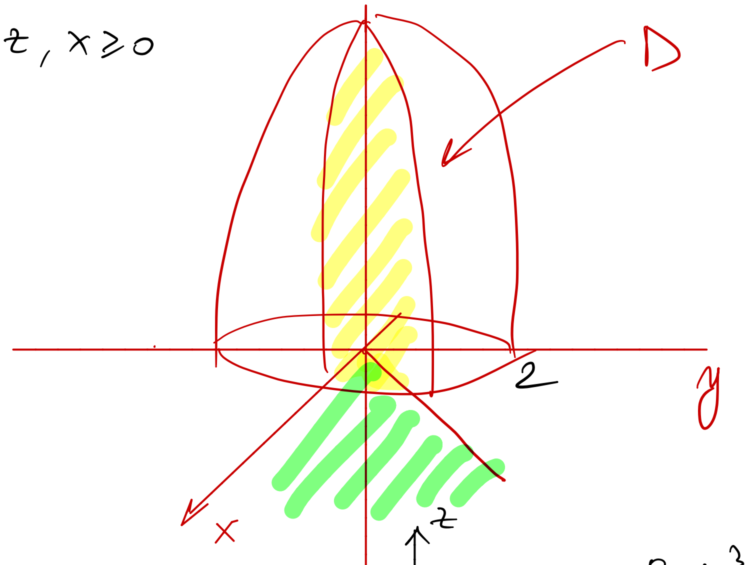
Successivamente, calcolare $\iiint_E xyz\,dxdydz$, dove

$$E=\{(x,y,z)\in D : 0\le y\le x\}$$



$z=8-(x^2+y^2)^{3/2}$ è di rotaz. intorno all'asse z, ottenuta facendo ruotare la curva del semipiano xz, $x\ge 0$

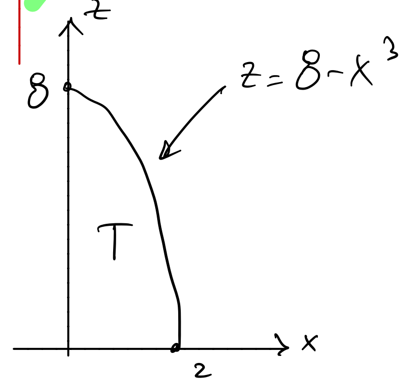
$$z=8-(x^2)^{3/2}=8-x^3$$



Volume con Guldino

$$\text{vol } D = 2\pi \iint_T x\,dxdz =$$

$$=2\pi\int_0^2 dx\int_0^{8-x^3} dz\; x = 2\pi\int_0^2 dx\; x(8-x^3) = \text{immediato.}$$



$$\iiint_E xyz\,dxdydz = \int_0^{\pi/4} d\theta\int_0^2 d\rho\int_0^{8-\rho^3} dz\,(\rho\cos\theta)(\rho\,\text{sen}\theta)\,z\,\rho =$$

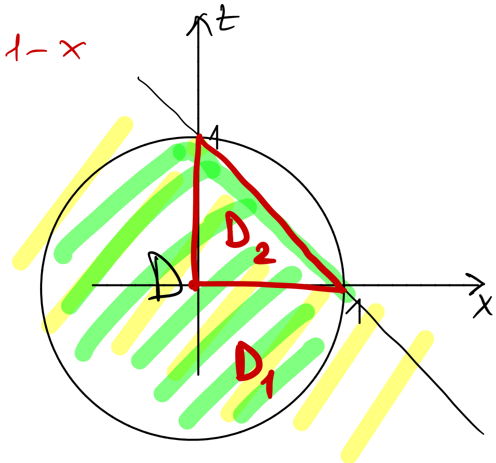
$$=\underbrace{\left(\int_0^{\pi/4} d\theta\,\text{sen}\theta\cos\theta\right)}_{1/4}\cdot\int_0^2 d\rho\,\rho^3\int_0^{8-\rho^3} z\,dz = \frac{1}{4}\int_0^2 d\rho\,\rho^3\,\frac{1}{2}(8-\rho^3)^2 \quad \text{immediato.}$$

ESERCIZIO. Calcolare $\iiint_T x \, dx\, dy\, dz$, dove

$$T = \{ (x,y,z) : x^2 + z^2 \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1 - x - z \}$$

cilindro intorno all'asse y.

Deve essere $1 - x - z \geq 0 \iff z \leq 1 - x$



$$T = \{(x,y,z) : (x,z) \in D, \quad 0 \leq y \leq 1 - x - z\}$$

$$\iiint_T x \, dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dz \, x \int_0^{1-x-z} dy =$$

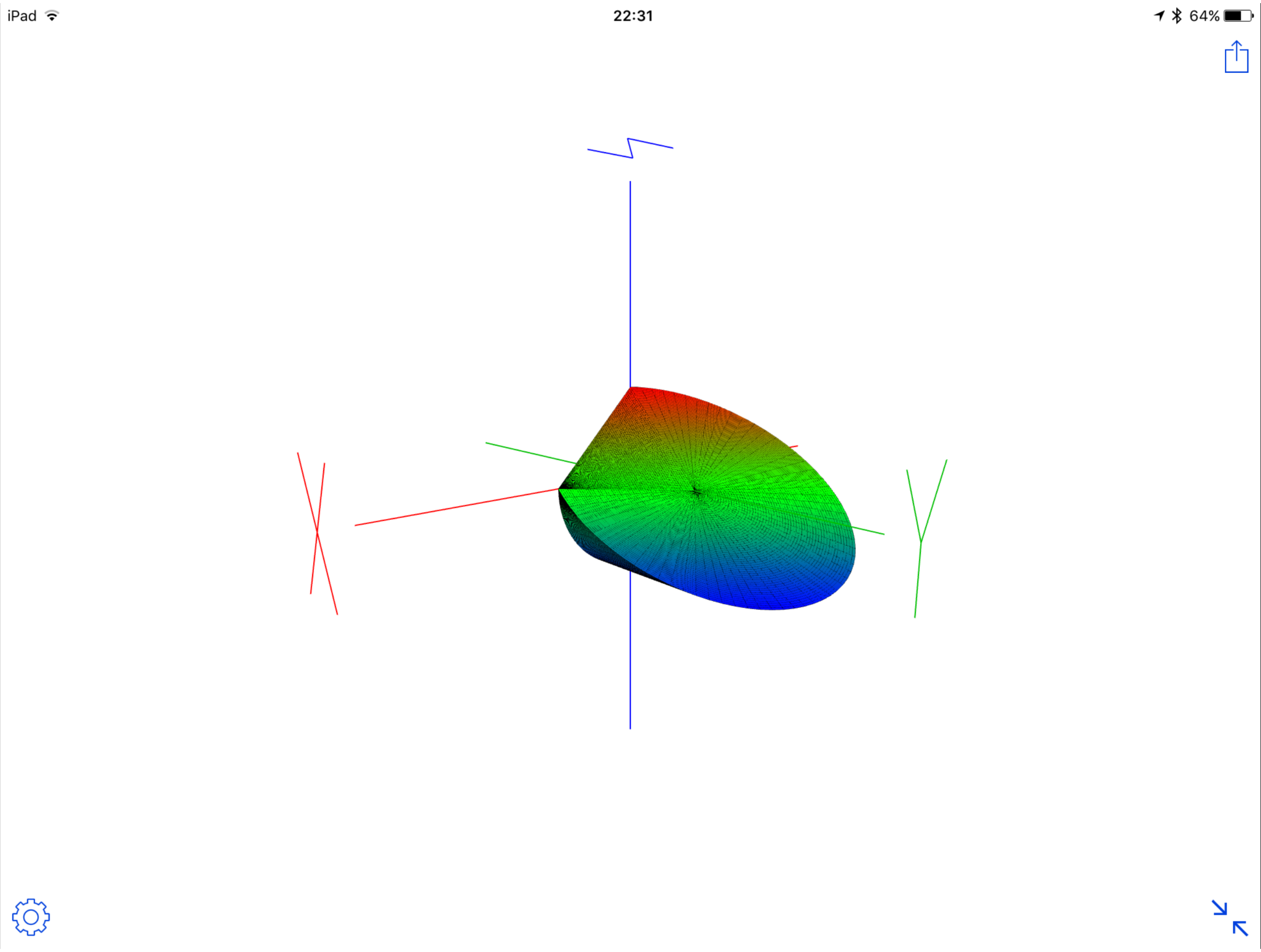
$$= \iint_D dx\,dz \quad x(1-x-z) = \iint_{D_1} \cdots + \iint_{D_2} \cdots =$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ z = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$= \int_{\pi/2}^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \, \overset{\rho\cos\theta}{\rho} \left(1 - \rho\cos\theta - \rho \operatorname{sen}\theta\right) + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \ x(1-x-z) =$$

$$= \underbrace{\int_{\pi/2}^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \ \rho^2 \cos\theta}_{\text{Immediato}} - \underbrace{\int_{\pi/2}^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \ \rho^3 \cos^2\theta}_{\text{quasi immediato}} - \underbrace{\int_{\pi/2}^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \ \rho^3 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}_{\text{immediato.}} +$$

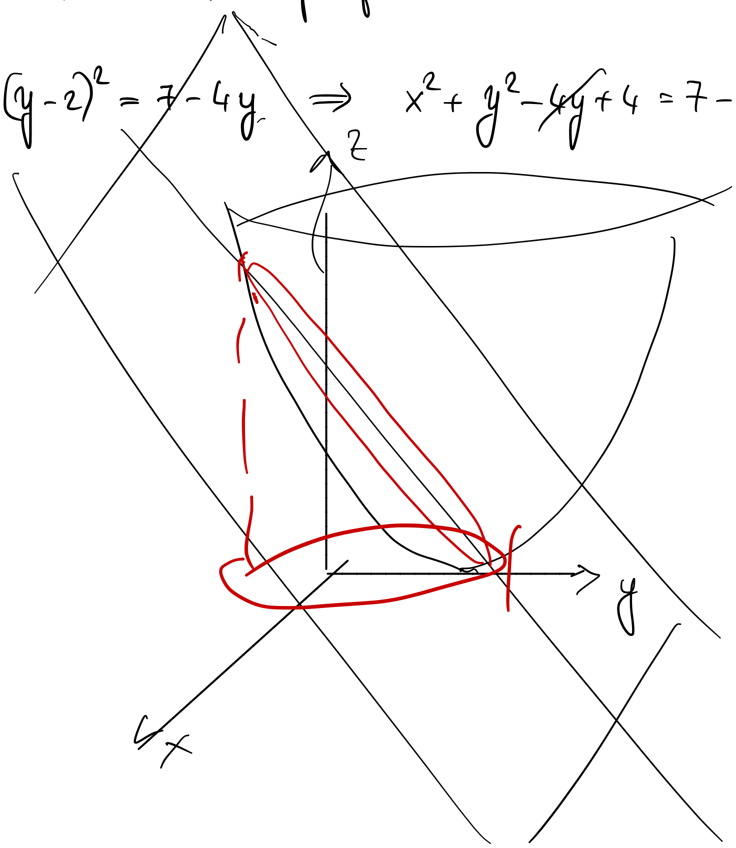
$$+ \int_0^1 dx \ x \left[(1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right] \quad \text{immediato.}$$


iPad
22:31
64%

ESERCIZIO: Calcolare $\iiint_E (2+x^2y^2)\,dx\,dy\,dz$, dove E è il solido compreso tra il paraboloide $z=x^2+(y-2)^2$ e il piano $z=7-4y$

Intersezione tra le superfici:

$$x^2+(y-2)^2=7-4y \Rightarrow x^2+y^2-\cancel{4y}+4=7-\cancel{4y} \Rightarrow x^2+y^2=3$$



$$E=\{(x,y,z):\ \overbrace{x^2+y^2\le 3}^{D},\ x^2+(y-2)^2\le z\le 7-4y\}$$

$$\iiint_E (2+x^2y^2)\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy\int_{x^2+(y-2)^2}^{7-4y} dz\,(2+x^2y^2)=$$

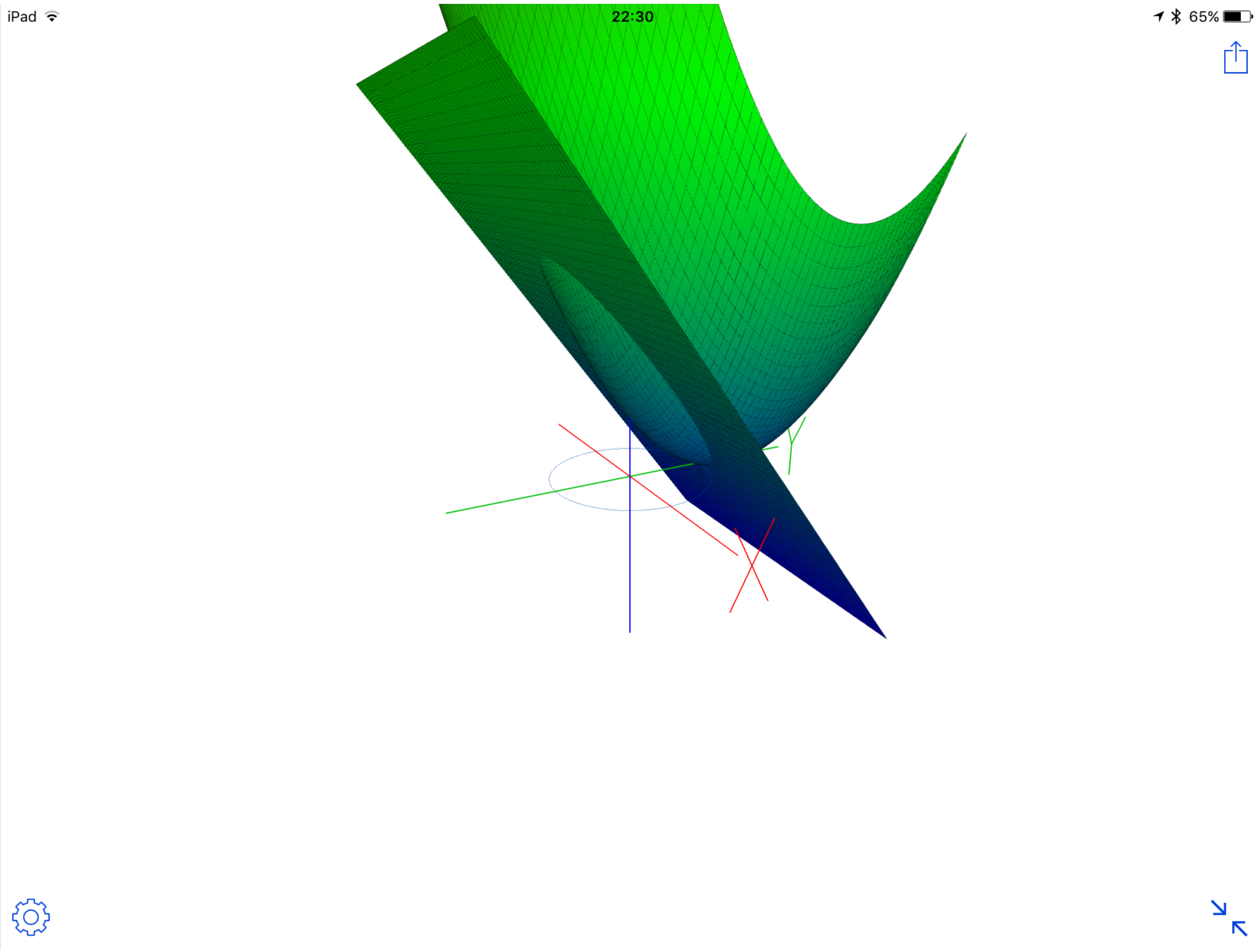
$$=\iint_D dx\,dy\,(2+x^2y^2)\left(7-\cancel{4y}-x^2-(y-2)^2\right) = \text{[coord polari]}$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} d\rho\,(2+\rho^4\cos^2\theta\,\sin^2\theta)(7-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta-4)\,\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} d\rho\,(2+\rho^4\cos^2\theta\,\sin^2\theta)(3-\rho^2)\,\rho=$$

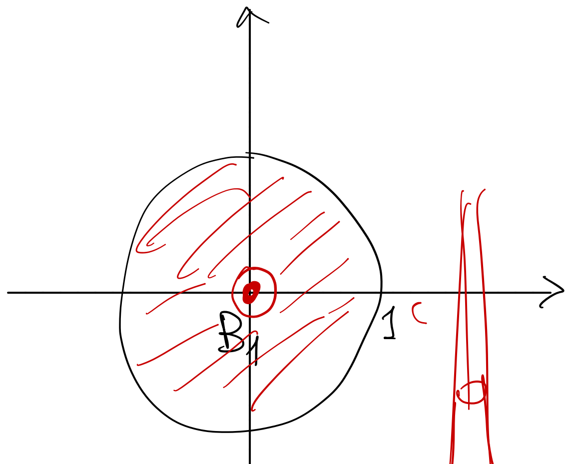
$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} d\rho\;2\rho(3-\rho^2)+\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} d\rho\;\rho^5(3-\rho^2)\overbrace{\cos^2\theta\,\sin^2\theta}^{\frac{\sin^2 2\theta}{4}}$$

$= \ldots$


iPad
22:30
65%
Y
X

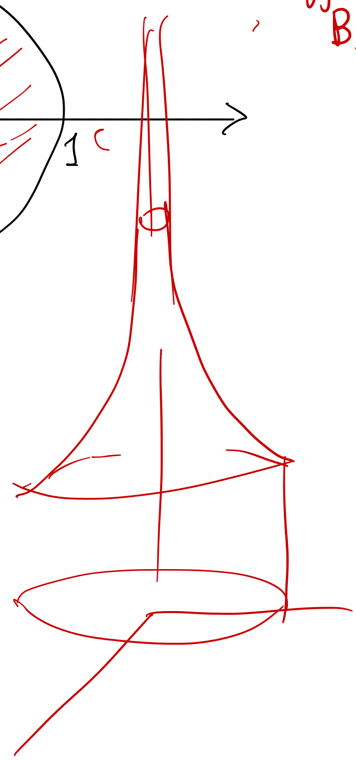
ESERCIZIO: Calcolare $\displaystyle\iint_{B_1} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, dove B_1 è il cerchio unitario

N.B. La funzione non è limitata vicino all'origine $\Rightarrow$ non è un integrale di Riemann. E' un integrale improprio



$$\iint_{B_1} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \, \frac{1}{\cancel{\rho}}\cancel{\rho} =$$

$$= 2\pi$$



ESERCIZIO: Calcolare $\displaystyle\iint_{B_1} \frac{dx\,dy}{\underbrace{\|(x,y)\|^\alpha}_{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^\alpha = (x^2+y^2)^{\alpha/2}}}$, dove B_1 è il cerchio unitario

$\alpha > 0$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \, \frac{\rho}{\rho^\alpha} = 2\pi \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{\alpha-1}}$$

converge se $\alpha - 1 < 1 \iff \alpha < 2$

diverge se $\alpha \geq 2$.

ESERCIZIO: Calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B_1} \frac{dx\,dy}{\|(x,y)\|^\alpha}$, dove B_1 è il cerchio unitario

verificare che converge sse $\alpha > 2$.

ESERCIZIO Calcolare $\displaystyle\iiint_{B_1} \frac{dx\,dy\,dz}{\|(x,y,z)\|^\alpha}$

Per casa: verificare che converge sse $\alpha < 3$, e calcolarlo per $\alpha < 3$.

Seguono altri esercizi che non ho fatto in tempo a discutere a lezione

ESERCIZIO: Calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$

ESERCIZIO: Calcolare il volume di

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad x^2 - x + y^2 \leq 0\}$$

ESERCIZIO

Calcolare
$$\iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus B_1} \frac{dx\,dy\,dz}{\|(x,y,z)\|^{\alpha}}$$

ESERCIZIO: Calcolare $\displaystyle\iiint_E \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{4/3}}\,dx\,dy\,dz$, dove

$$E=\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le z^2\le 4,\quad z\le 0\right\}.$$