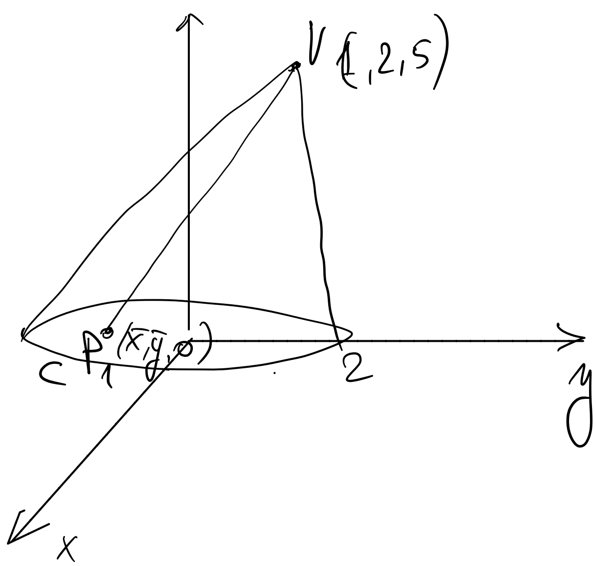
Coordinate "su misura"

ESERCIZIO Calcolare $\iiint_E x \, dx\,dy\,dz$, dove E è il cono che ha per base il cerchio $C = \{(x,y,z): z=0,\ x^2+y^2 \le 4\}$ e per vertice il punto $V(1,2,5)$.



Il generico punto di C è $\begin{cases} \bar{x} = \rho\cos\theta \\ \bar{y} = \rho\,\text{sen}\,\theta \\ \bar{z} = 0 \end{cases}$ $\boxed{\begin{array}{l} 0 \le \rho \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}}$

Fissato $P_1(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, il generico punto del segmento P_1V è $P = (1-t)P_1 + tV \qquad t \in [0,1]$

$$\begin{cases} x = (1-t)\bar{x} + t\cdot 1 = (1-t)\rho\cos\theta + t \\ y = (1-t)\bar{y} + t\cdot 2 = (1-t)\rho\,\text{sen}\,\theta + 2t \\ z = \cancel{(1-t)\bar{z}} + t\cdot 5 = 5t \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho \in [0,2] \\ \theta \in [0,2\pi] \\ t \in [0,1] \end{array}$$

cambiamento di coordinate.

$$\begin{cases} x = (1-t)\,\bar{x} + t\cdot 1 = (1-t)\rho\cos\theta + t \\ y = (1-t)\,\bar{y} + t\cdot 2 = (1-t)\rho\,\text{sen}\theta + 2t \\ z = \cancel{(1-t)\,\bar{z}} + t\cdot 5 = 5t \end{cases}$$

$$\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,t)} = \det \begin{bmatrix} (1-t)\cos\theta & -(1-t)\rho\,\text{sen}\theta & -\rho\cos\theta + 1 \\ (1-t)\,\text{sen}\theta & (1-t)\rho\cos\theta & -\rho\,\text{sen}\theta + 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= 5 \det \begin{bmatrix} (1-t)\cos\theta & -(1-t)\rho\,\text{sen}\theta \\ (1-t)\,\text{sen}\theta & (1-t)\rho\cos\theta \end{bmatrix} = 5\rho(1-t)^2$$

L'integrale diventa

$$\iiint_{\tilde{E}} 5\rho(1-t)^2\left[(1-t)\rho\cos\theta + t\right] d\rho\, d\theta\, dt =$$

$$\tilde{E} = [0,2]\times[0,2\pi]\times[0,1]$$

perché $\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = 0$

$$= \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dt \; 5\rho(1-t)^2\left[\cancel{(1-t)\rho\cos\theta} + t\right] =$$

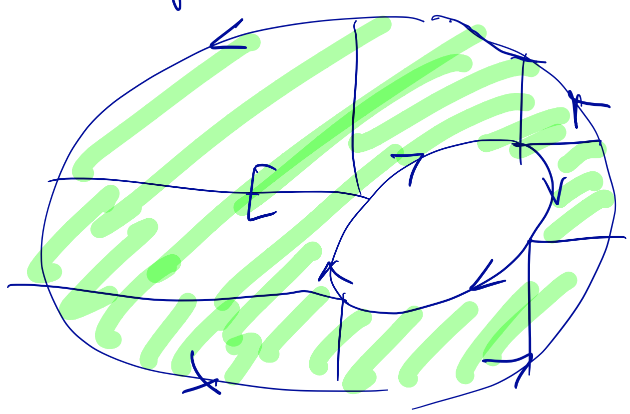
$$= 5\cdot 2\pi \left(\int_0^2 d\rho\; \rho\right)\left(\int_0^1 dt\; (1-t)^2\, t\right) = 10\pi\cdot 2\cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{3}\pi$$

$$\int_0^2 d\rho\;\rho = 2$$

$$\int_0^1 dt\;(1-t)^2\,t = \int_0^1 (t - 2t^2 + t^3)\, dt = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6-8+3}{12}$$

FORMULE di GAUSS-GREEN in dim. 2.

E dominio regolare di $\mathbb{R}^2$ = unione di un numero finito di domini normali regolari a due a due senza punti interni in comune



OSS La frontiera di un dominio regolare è unione di un numero finito di curve regolari.

Stabiliamo di "orientare" la frontiera di E in modo da percorrerla lasciando il dominio sulla sinistra.

TEOREMA (formule di Gauss-Green).

Sia E un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$, e sia f una funzione di classe $C^1(E)$ (N.B.: fino al bordo). Allora si ha:

1) $$\int_{\partial^+ E} f \, dy = \iint_E \frac{\partial f}{\partial x} \, dx\, dy$$

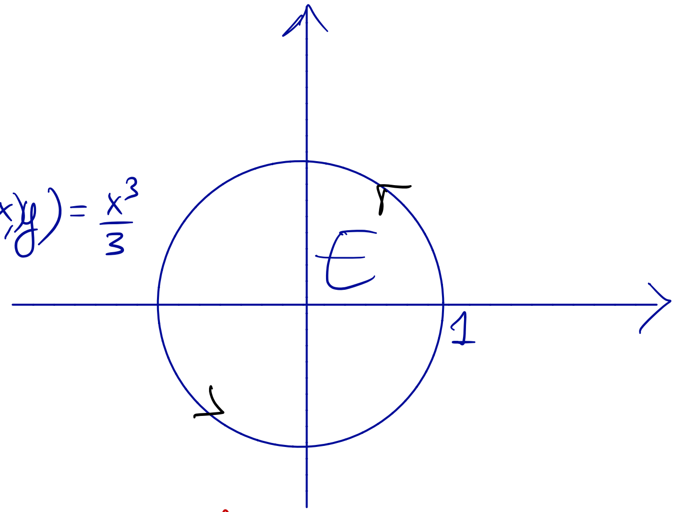
2) $$\int_{\partial^+ E} f \, dx = -\iint_E \frac{\partial f}{\partial y} \, dx\, dy$$

dove $\partial^+ E$ è la frontiera di E percorsa nel verso "positivo" indicato precedentemente.

ESEMPIO Sia E il cerchio unitario. Voglio calcolare

$$\iint_E x^2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho\ \rho^3 \cos^2\theta = \frac{\pi}{4}$$

osserviamo che $x^2 = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x^3}{3}\right)$



Applichiamo le formule di G-G a $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3}$

$$\iint_E x^2\,dx\,dy = \underbrace{\int_{\partial^+E} \frac{x^3}{3}\,dy}$$

integrale di una forma diff. (lavoro di un campo)

Parametrizzo ∂^+E $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta \end{cases}$ $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \cos^3\theta \cdot \cos\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta =$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^{2\pi} \left(1 + \cancel{2\cos 2\theta} + \cos^2 2\theta\right) d\theta = \frac{1}{12}\int_0^{2\pi}\left(1 + \frac{1+\cancel{\cos 4\theta}}{2}\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}$$

COROLLARIO (Teorema di Stokes in dim 2).

Sia $\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$ una f.d. di classe $C^1(E)$, E dominio regolare di $\mathbb{R}^2$. Allora:

$$\int_{\partial^+ E} \omega = \underbrace{\int_{\partial^+ E} A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy}_{} =$$

↳ lavoro del campo $\underline{F}(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$

$$= \iint_E \left(\frac{\partial B}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy = \iint_E (B_x - A_y)\,dx\,dy$$

La funzione scalare $\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}$ si chiama <u>rotore</u> del campo $\underline{F} = (A, B)$.

In particolare, se $\underline{F}$ è un campo irrotazionale, rot F (curl F) $= 0$

$$\int_{\partial^+ E} \omega = \int_{\partial^+ E} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = 0.$$

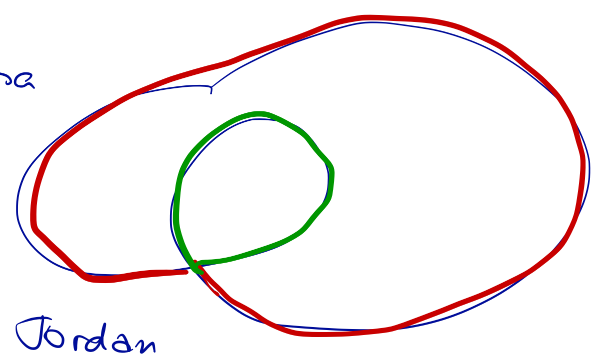
Te

TEOREMA (già visto, ma mai dimostrato)

Se A è un aperto di $\mathbb{R}^2$ semplicemente connesso, e $\underline{F}$ è un campo vettoriale di classe $C^1(A,\mathbb{R}^2)$ irrotazionale, allora esso è conservativo.

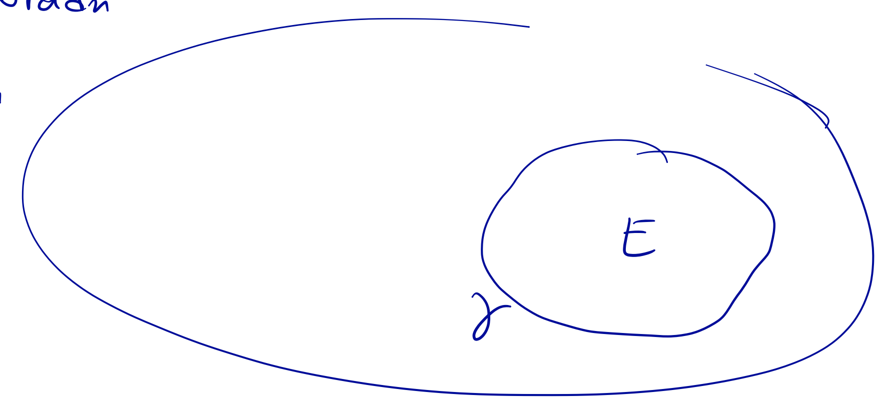
DIM. Basta provare che il lavoro di $\underline{F}$ lungo ogni curva chiusa vale zero.

In realtà basta provarlo per tutte le curve chiuse e semplici (curve di Jordan) in quanto ogni curva chiusa si può "scomporre" in curve di Jordan.



Sia γ una tale curva di Jordan

Considero E = la parte "interna" a γ. Poiché A è semplicemente connesso, la regione E è tutta contenuta in A.



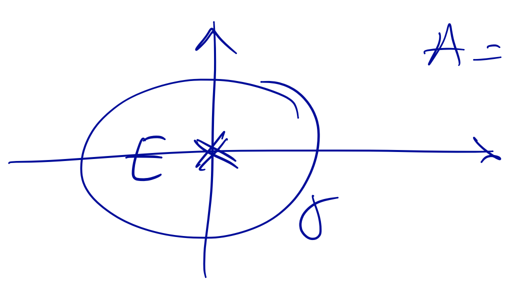
E è un dominio regolare $\Rightarrow$ Stokes $\Rightarrow$ A

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = 0$$

$\square$

Se non è sempl. connesso, ci sono curve di Jordan γ contenute in A ma tali che il dominio E delimitato da γ non sta tutto in A

$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$



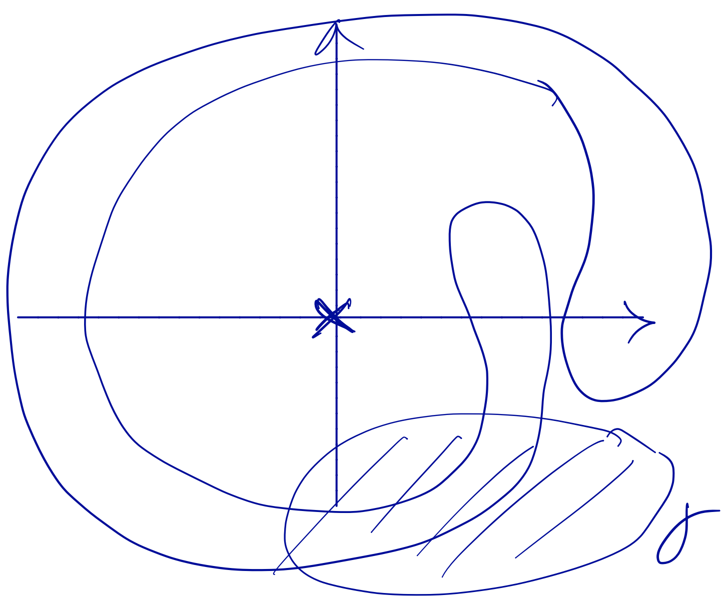
COROLLARIO (anche questo già visto)

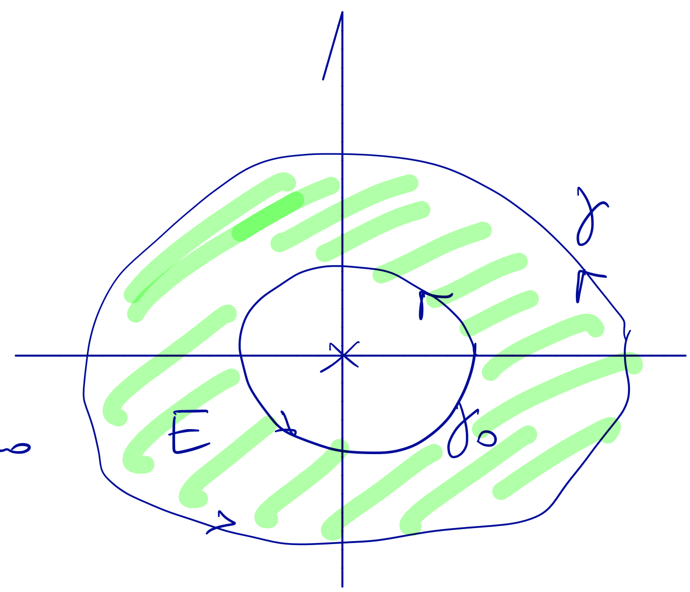
Sia A un aperto connesso con una lacuna (per es. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$), quindi A non è semplic. connesso.
Sia $\underline{F}$ un campo vett. di classe $C^1(A;\mathbb{R}^2)$ irrotazionale.
Se $\exists$ una curva γ_0 di Jordan contenuta in A che gira intorno alla lacuna e t.c. il lavoro di $\underline{F}$ lungo γ_0 sia nullo, allora $\underline{F}$ è conservativo.

DIM. Per semplicità, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Sia γ una curva di Jordan contenuta in A

due casi:
1) La curva allaccia l'origine
2) La curva non allaccia l'origine $\Rightarrow$ prendo E delimitato da γ e applico Stokes
$\rightarrow \int_\gamma \underline{F}\cdot\underline{T}\, ds = 0$.





Se la curva "allaccia" l'origine, supponiamo per iniziare che sia tutta esterna a γ_0

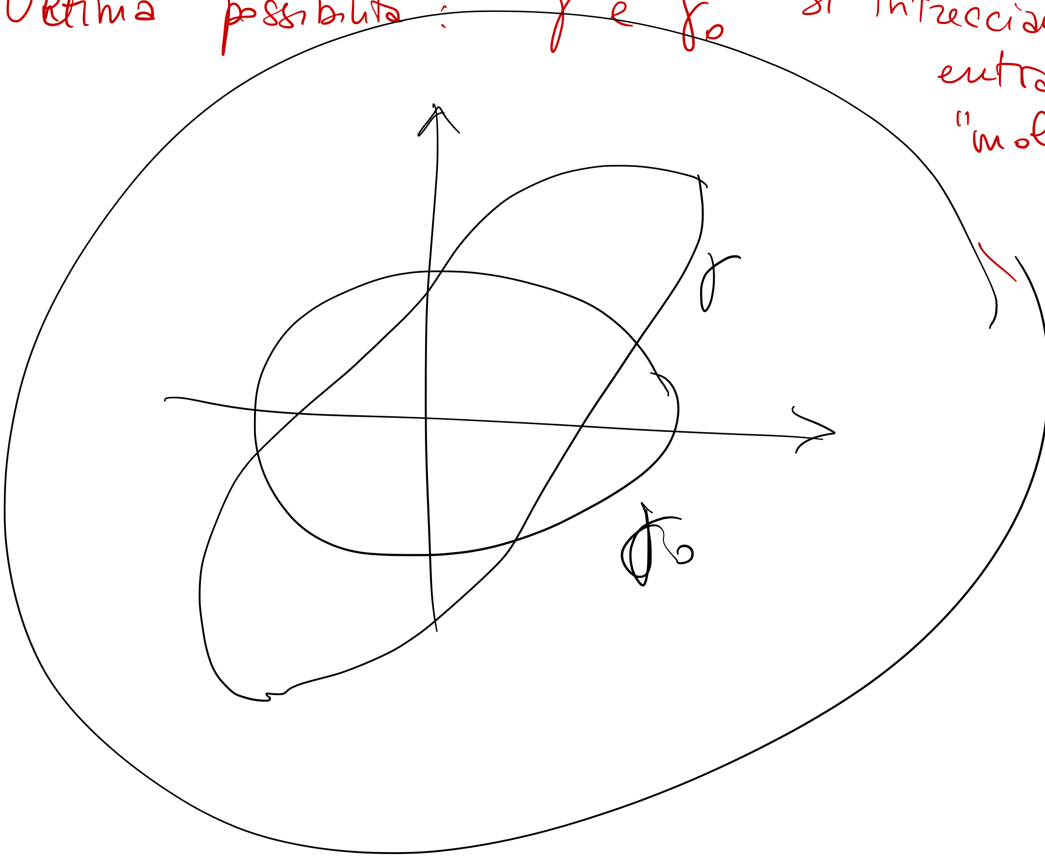
Sia E l'"anello" compreso tra γ e γ_0

segno meno dovuto all'orientaz. di γ_0

$$0 = \iint_E \underbrace{\text{rot}\,\underline{F}}_{\overset{\shortparallel}{0}}\, dx\,dy = \int_{\partial^+ E} \underline{F}\cdot\underline{T}\, ds = \int_\gamma \underline{F}\cdot\underline{T}\, ds - \underbrace{\int_{\gamma_0} \underline{F}\cdot\underline{T}\, ds}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} F \cdot T \, ds = 0.$$

Ultima possibilità: γ e γ_0 si "intrecciano", allora confronto entrambe con una curva "molto grande" che le contiene entrambe



$\square$

IN questa dim. abbiamo provato che se F è irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ allora tutte le curve di Jordan che girano intorno alla lacuna nello stesso verso forniscono lo stesso lavoro.

ALTRO COROLLARIO di G-G: il TEOREMA della DIVERGENZA

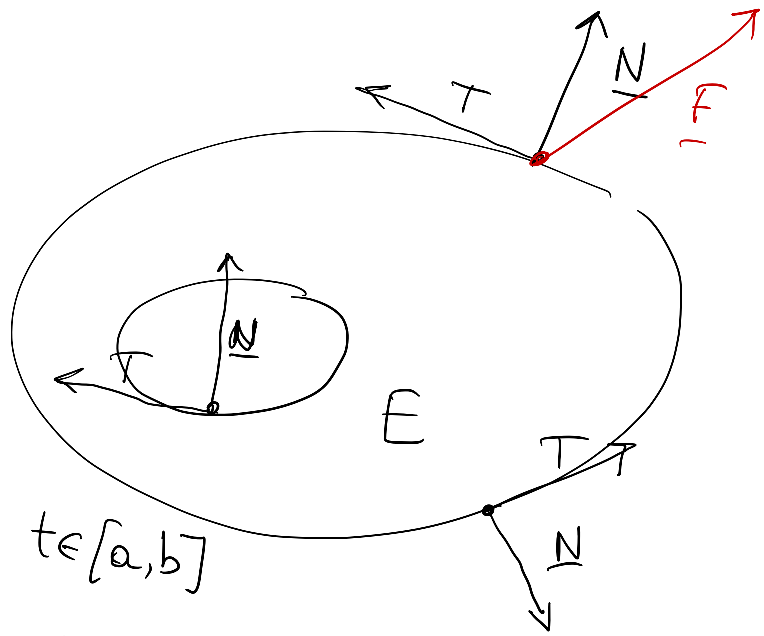
Sia $\underline{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ un campo vett. C^1 definito in E dominio regolare.

<u>Def.</u> $\operatorname{div} F(x,y) = \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(x,y)$

è una funzione scalare definita in E.

Esempio se $\underline{F}(x,y) = \left(x^3 y, \ xy + 3x\sqrt{y}\right)$

$\operatorname{div} \underline{F} = 3x^2 y + x + \dfrac{3x}{2\sqrt{y}}$



Definiamo $\underline{N}$ il versore normale esterno a ∂E.

Supponiamo che la frontiera $\partial^+ E$, orientata positivamente, sia descritta da una curva $\underline{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$ $t \in [a,b]$

$$\underline{T}(t) = \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, \ \frac{y'(t)}{\sqrt{}} \right)$$

$$\underline{N}(t) = \left(\frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + y'(t)^2}}, \ \frac{-x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right)$$

$$\int_{\partial^+ E} \underline{F} \cdot \underline{N} \, ds = \text{flusso di } \underline{F} \text{ uscente da } \partial^+ E$$

<u>OSS</u> Calcolo del flusso: (immaginando che $\partial^+ E$ sia parametrizzato con una curva γ) $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $t \in [a,b]$

$$\int_{\partial^+ E} \underline{F} \cdot \underline{N} \, ds = \int_a^b \frac{\left[F_1(\underline{\gamma}(t))\, y'(t) - F_2(\gamma(t))\, x'(t)\right]}{\cancel{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}} \cdot \underbrace{\cancel{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}\, dt}_{ds} =$$

$$= \int_a^b \left(F_1(\gamma(t))\, y'(t) - F_2(\gamma(t))\, x'(t)\right) dt =$$

$$= \int_{\partial^+ E} (-F_2, F_1) \cdot \underline{T} \, ds \overset{\text{Stokes}}{=} \iint_E \text{rot}(-F_2, F_1) \, dx\, dy =$$

$$= \iint_E \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_E \text{div } F \, dx\, dy$$

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

E dominio regolare di $\mathbb{R}^2$. $\underline{F}$ campo di classe $C^1(E; \mathbb{R}^2)$.

Allora.

$$\int_{\partial E} \underline{F} \cdot \underline{N}_e \, ds = \iint_E \text{div } \underline{F} \, dx\, dy$$

Vers. Normale esterno