TEOREMA (cambiamento di variabili negli integrali ~~doppi~~ tripli).

Siano T, D due domini regolari di $\mathbb{R}^3$, e sia $\phi : T \to D$ una funzione tale che

1) ϕ biettiva
2) $\phi \in C^1(T; D)$
3) lo jacobiano di ϕ è sempre $\neq 0$.

$$\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0 \quad \forall (u,v,w) \in T.$$

$$\begin{aligned} \phi : T &\longrightarrow D \\ (u,v,w) &\longmapsto \Phi(u,v,w) = \big(x(u,v,w),\, y(u,v,w),\, z(u,v,w)\big) \end{aligned}$$

ϕ è un diffeomorfismo di classe C^1 tra T e D.

OSS se ϕ è un diffeomorfismo ϕ^{-1} è un diffeomorfismo (segue dal teorema di invertib. locale).

Allora, $\forall$ funzione $f(x,y,z)$ continua in D si ha:

$$\iiint_{\substack{D \\ \parallel \\ \Phi(T)}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_T \underbrace{f(\phi(u,v,w))}_{\substack{\parallel \\ f(x(u,v,w),\, y(u,v,w),\, z(u,v,w))}} \left| \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}(u,v,w) \right| du\,dv\,dw$$

dominio regolare di $\mathbb{R}^3$ = unione di un numero finito di domini <u>normali</u> regolari di $\mathbb{R}^3$ senza punti in comune.

Un dominio <u>normale</u> regolare è un insieme della forma

$$E = \{(x,y,z) : (x,y) \in F \text{ dominio regolare di } \mathbb{R}^2,\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$$

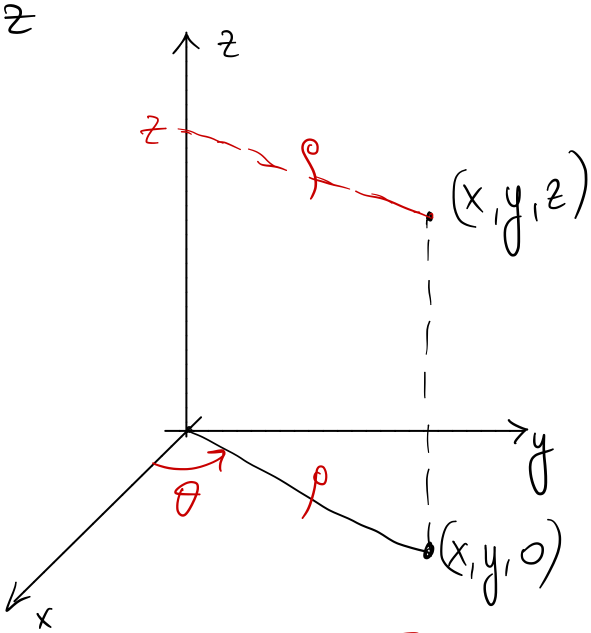
$\alpha, \beta : F \to \mathbb{R}$, di classe C^1 e t.c. $\alpha(x,y) < \beta(x,y)$

COORDINATE CILINDRICHE

Corrispondono a cambiare (x,y) in coordinate polari, e a lasciare immutata la z.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

(u,v,w) qui sono (ρ, θ, z)



Le superfici $\rho = \text{cost.}$ sono dei cilindri

$$\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)} = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \rho$$

La formula diventa:

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_D f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dz.$$

Volume di una palla usando coordinate cilindriche

$$B_R = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$$

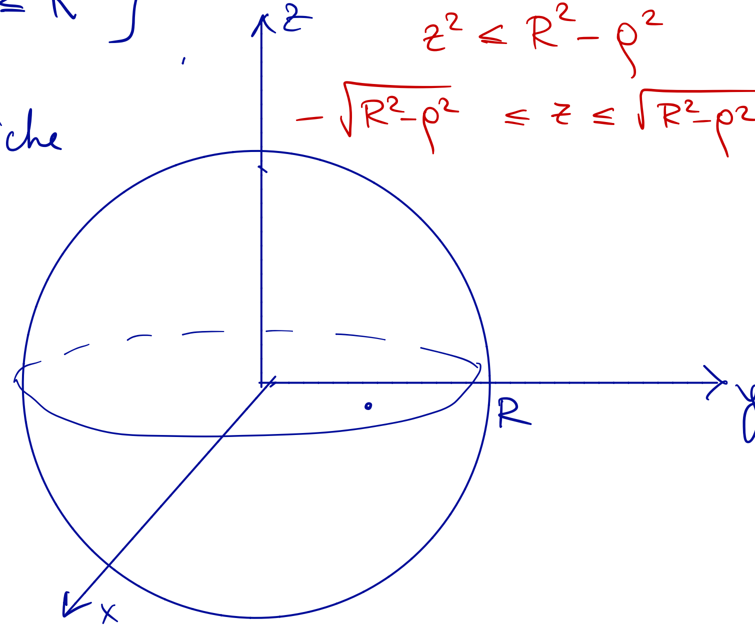
$$\rho^2+z^2 \le R^2$$

$$z^2 \le R^2-\rho^2$$

$$-\sqrt{R^2-\rho^2} \le z \le \sqrt{R^2-\rho^2}$$

Passando a coordinate cilindriche B_R diventa

$$D = \{(\rho,\theta,z) : 0 \le \theta \le 2\pi, \; 0 \le \rho \le R, \; -R \le z \le R\}$$



$$\mathrm{Vol}\, B_R = \iiint_{B_R} 1 \, dx\,dy\,dz =$$

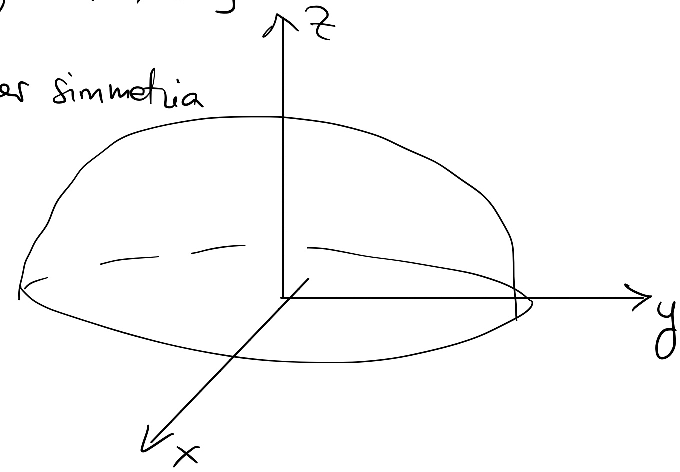
$$= \iiint_D \rho \, d\rho\, d\theta\, dz = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R d\rho \int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} dz \; \rho = 2\cdot 2\pi \int_0^R d\rho\, \rho \sqrt{R^2-\rho^2}$$

$$R^2-\rho^2 = t$$
$$-2\rho\, d\rho = dt$$

$$= \frac{4\pi}{2} \int_0^{R^2} dt \sqrt{t} = 2\pi \, \frac{2}{3} \, t^{3/2}\Big|_0^{R^2} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Baricentro di una semipalla usando coordinate cilindriche.

$$B_R^+ = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le R^2, \quad z \geqslant 0\}$$



$$x_B = \frac{1}{\mathrm{vol}\, B_R^+} \iiint_{B_R^+} x \, dx\,dy\,dz = 0 \quad \text{per simmetria}$$

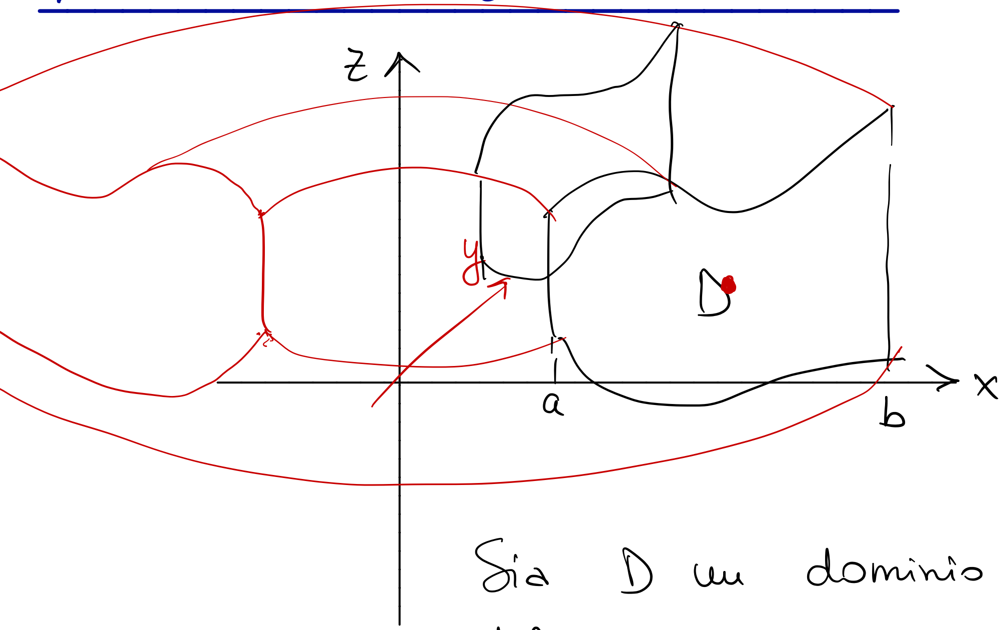
$$y_B = \frac{1}{\mathrm{vol}\, B_R^+} \iiint_{B_R^+} y \, dx\,dy\,dz = 0$$

$$z_B = \frac{1}{\mathrm{vol}\, B_R^+} \iiint_{B_R^+} z \, dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{=\,2\pi} \int_0^R d\rho \int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} dz \; z\,\rho = \frac{3\cdot\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi} R^3} \int_0^R d\rho\, \rho\, \frac{1}{2}\left(R^2-\rho^2\right) =$$

$$= \frac{3}{2R^3} \int_0^R \left(\rho R^2 - \rho^3\right) d\rho = \frac{3}{2R^3}\left(R^2 \cdot \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{3 \cdot R^{\cancel{4}}}{2\cancel{R^3}\, 4} = \frac{3R}{8}$$

Volume dei solidi di rotazione



per semplicità, prendo D normale risp. alla x

$D = \{ (x,z) : \; a \le x \le b, \; \alpha(x) \le z \le \beta(x) \}$

Sia D un dominio (per sempl., normale) del semipiano xz, $x \geq 0$.

Faccio ruotare D di un giro completo intorno all'asse z, ottenendo un solido E di rotazione

vol E = ?

Il dominio E si studia bene in coordinate cilindriche, e diventa

$\tilde{E} = \{ (\rho, \theta, z) : \; 0 \le \theta \le 2\pi, \; a \le \rho \le b, \; \alpha(\rho) \le z \le \beta(\rho) \}$

$$\text{vol } E = \iiint_E 1 \, dx\,dy\,dz = \iiint_{\tilde{E}} \rho \, d\rho\, d\theta\, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b d\rho \, \rho \int_{\alpha(\rho)}^{\beta(\rho)} dz =$$

$$= 2\pi \int_a^b d\rho \int_{\alpha(\rho)}^{\beta(\rho)} \rho \, dz = 2\pi \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} x \, dz = 2\pi \iint_D x \, dx\,dz$$

ρ lo chiamo x

Questo risultato vale anche se D è un dominio normale rispetto alla z oppure se D è un dominio unione finita di domini normali.

TEOREMA DI GULDINO

Sia E il solido di rotazione ottenuto facendo ruotare la regione D del semipiano xz, con $x \geq 0$, intorno all'asse z.

Allora

$$\text{vol } E = 2\pi \iint_D x \, dx\, dz$$

OSS.

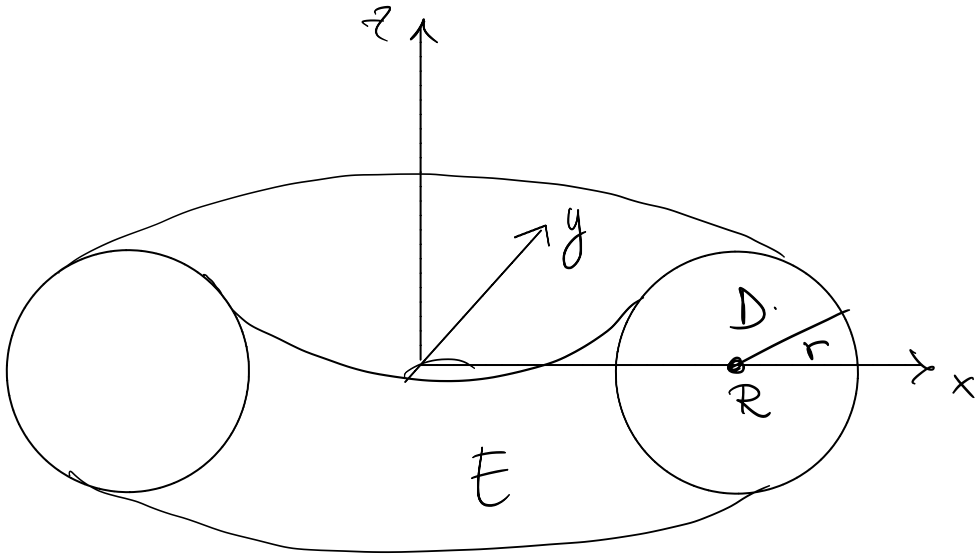
$$\text{vol } E = 2\pi \cdot \text{area } D \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\text{area } D} \iint_D x \, dx\, dz \right)}_{X_B = \text{ ascissa del baricentro di } D.} =$$

$$= \underbrace{2\pi X_B}_{\text{lunghezza della circ. percorsa dal baricentro girando intorno all'asse } z.} \cdot \text{area } D$$

TEOREMA DI GULDINO (interpretaz. geometrica)

Il volume di E è pari all'area di D moltiplicato per la lunghezza della circonferenza percorsa dal baricentro di D nella sua rotazione intorno all'asse z.

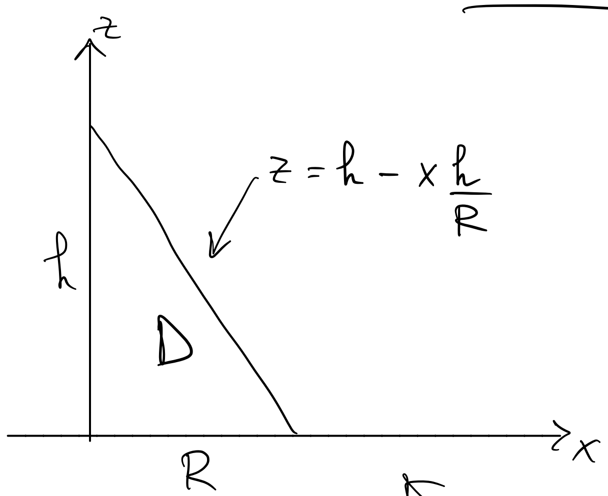
Calcolo del volume di un toro (ciambella)

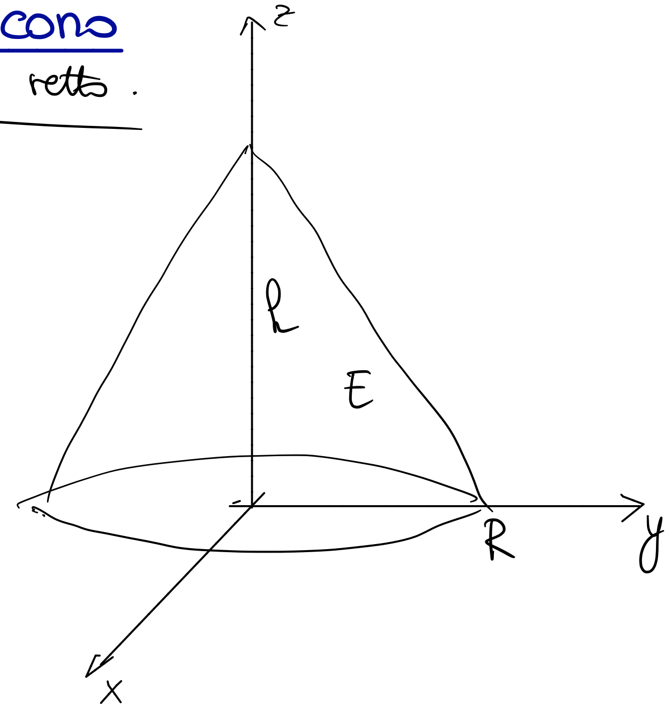


$$\text{vol}\, E = \underset{\substack{\shortparallel \\ x_B}}{2\pi R}\, \pi r^2 = 2\pi^2 R r^2$$

Calcolo del volume di un cono

circolare retto.



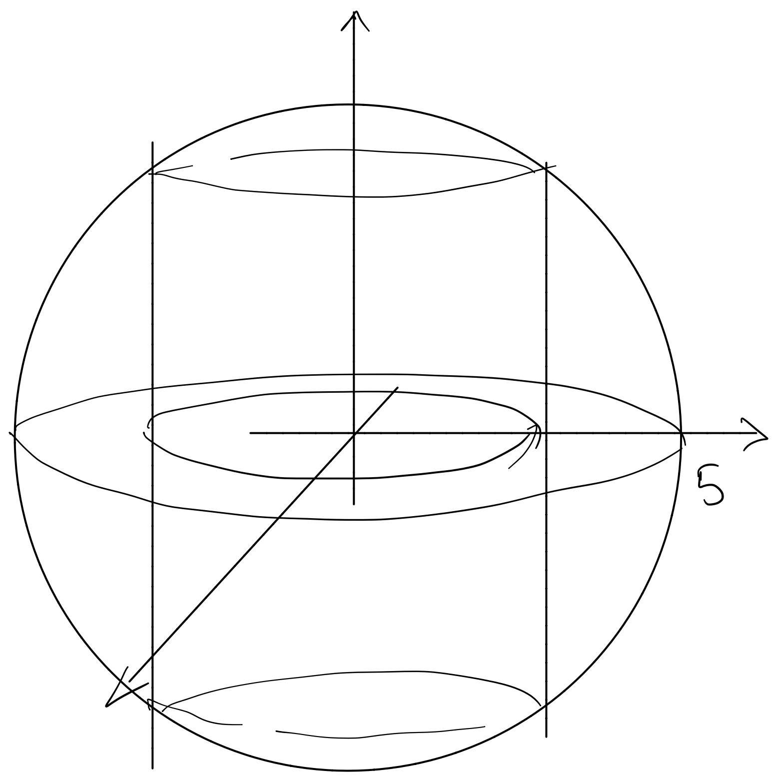


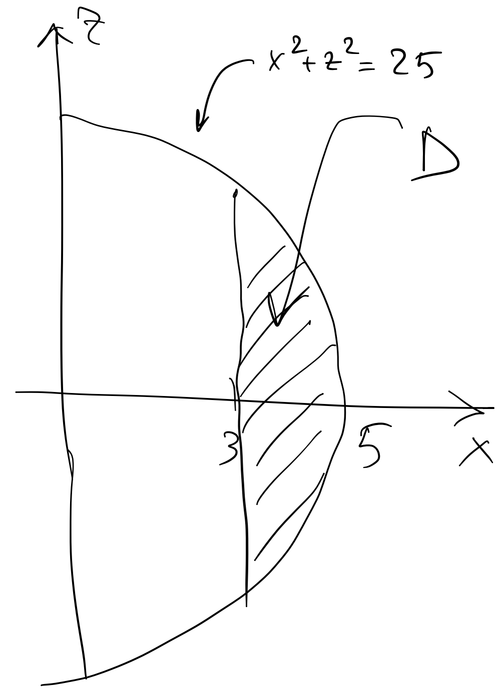
E è ottenuto dalla rotazione di D

$$\mathrm{vol}\, E = 2\pi \iint_D x \, dx\, dz = 2\pi \int_0^R dx \int_0^{h\left(1-\frac{x}{R}\right)} dz \; x = 2\pi h \int_0^R x\left(1-\frac{x}{R}\right) =$$

$$= 2\pi h \int_0^R \left(x - \frac{x^2}{R}\right) dx = 2\pi h \left(\frac{R^2}{2} - \frac{1}{R}\frac{R^3}{3}\right) = \frac{2\pi h R^2}{6} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$$

ESERCIZIO Trovare il volume del solido E costituito dai punti interni alla sfera $x^2+y^2+z^2=25$ ma esterni al cilindro $x^2+y^2=9$.

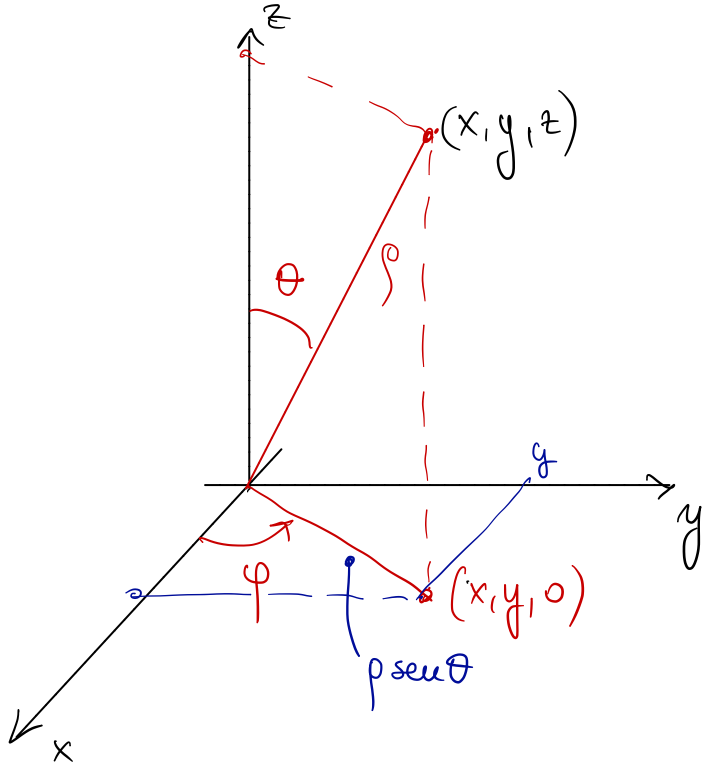




$$\text{Vol } E = 2\pi \iint_D x \, dx\, dz \quad \text{dove} \quad D = \{(x,z) : 3 \le x \le 5, -\sqrt{25-x^2} \le z \le \sqrt{25-x^2}\}$$

$$= 4\pi \int_3^5 dx\ x \int_0^{\sqrt{25-x^2}} dz = 4\pi \int_3^5 dx\ x\sqrt{25-x^2} = \dots$$

COORDINATE SFERICHE



$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$.

$\rho \geq 0$

$0 \leq \theta \leq \pi$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

o opportuni sottoinsiemi.

Ci sono pb. di iniettività, ma riguardano insiemi di vol. nullo.

$$\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \det \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi & \rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \rho^2 \operatorname{sen}\theta \det \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \rho^2\operatorname{sen}\theta \left[\cos^2\theta\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi \right] =$$

$$= \rho^2\operatorname{sen}\theta \left[\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta \right] = \rho^2\operatorname{sen}\theta \geq 0$$

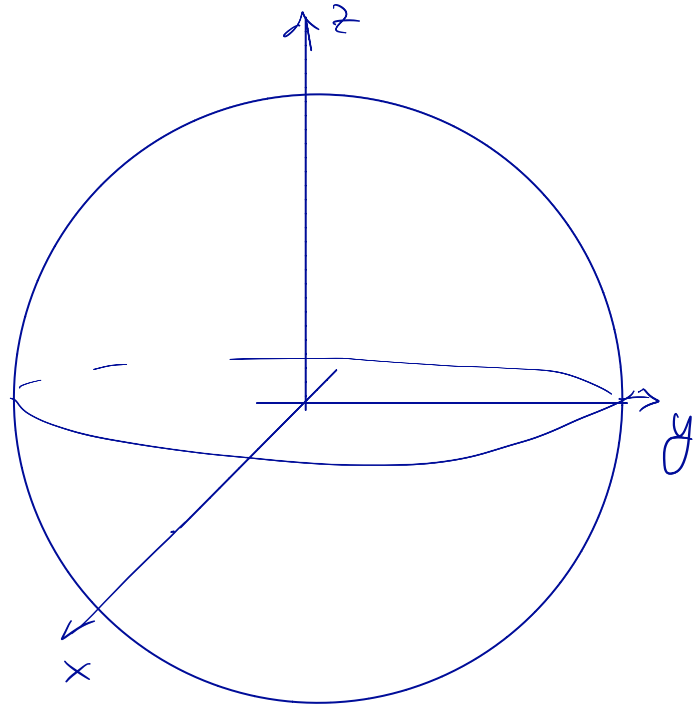
Formula di passaggio a coord. sferiche

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_D f(\rho \operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \rho\cos\theta)\,\rho^2\operatorname{sen}\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

Volume di una palla usando coordinate sferiche

$$\mathrm{Vol}\, B_R = \iiint_{B_R} 1 \, dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{\tilde{B}_R} \rho^2 \operatorname{sen}\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = (*)$$

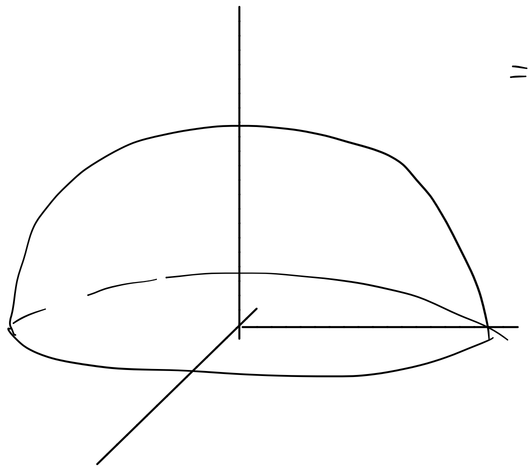


$$\tilde{B}_R = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) : \begin{array}{l} 0 \le \rho \le R \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \end{array} \right\}$$

$$(*) = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \; \underbrace{\int_0^{R} d\rho}_{\frac{R^3}{3}} \; \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta \; \rho^2 \operatorname{sen}\theta}_{2} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Baricentro di una semipalla usando coordinate sferiche

$$z_B = \frac{1}{\mathrm{Vol}\, B_R^+} \iiint_{B_R^+} z \, dx\, dy\, dz = \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R d\rho \; \rho \cos\theta \, \rho^2 \operatorname{sen}\theta =$$

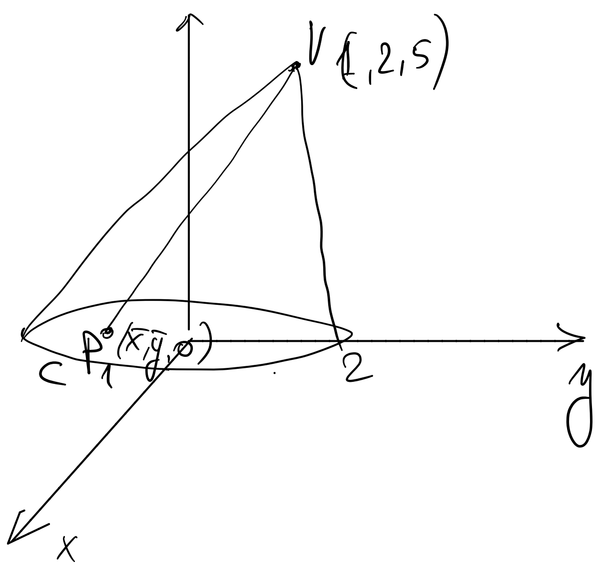


$$= \frac{3 \cdot \cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi} R^3} \underbrace{\int_0^{\pi/2} d\theta \, \cos\theta \operatorname{sen}\theta}_{1/2} \; \underbrace{\int_0^R \rho^3 \, d\rho}_{\frac{R^4}{4}} \doteq$$

$$= \frac{3R}{8}$$

Coordinate "su misura"

ESERCIZIO Calcolare $\iiint_E x \, dx\,dy\,dz$, dove E è il cono che ha per base il cerchio $C = \{(x,y,z):\ z=0,\ x^2+y^2 \le 4\}$ e per vertice il punto $V(1,2,5)$.



Il generico punto di C è
$$\begin{cases} \bar{x} = \rho\cos\theta \\ \bar{y} = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \bar{z} = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{array}{l} 0 \le \rho \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}}$$

Fissato $P_1(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, il generico punto del segmento P_1V

è $P = (1-t)P_1 + tV \qquad t \in [0,1]$

$$\begin{cases} x = (1-t)\,\bar{x} + t\cdot 1 = (1-t)\rho\cos\theta + t \\ y = (1-t)\,\bar{y} + t\cdot 2 = (1-t)\rho\,\mathrm{sen}\,\theta + 2t \\ z = \cancel{(1-t)\bar{z}} + t\cdot 5 = 5t \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho \in [0,2] \\ \theta \in [0,2\pi] \\ t \in [0,1] \end{array}$$

cambiamento di coordinate.