

## Foglio 13 (Analisi Vettoriale per Fisica a.a. 2015/16)

proff. F. Lanzara, A. Dall'Aglio, E. Montefusco

10 gennaio 2016

### 13.1 Esercizio

Calcolare

$$\int_E xy^2 z^3 dx dy dz,$$

$$E = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy\}.$$

### 13.2 Esercizio

Sia

$$E = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, 1/4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Calcolare

$$I = \int_E xyz dx dy dz.$$

### 13.3 Esercizio

Calcolare

$$I = \int_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-A)^2}}, \quad A > R.$$

(Il prodotto di  $I$  per la costante di gravitazione universale è il **potenziale newtoniano** generato in  $(0, 0, A)$  da una massa di densità costante  $= 1$  distribuita in una palla di raggio  $R$  e centro l'origine.)

### 13.4 Esercizio

Sia

$$E = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}, 0 \leq z \leq 2\}.$$

Calcolare

$$\int_E z^3 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz.$$

### 13.5 Esercizio

Sia

$$E = \{(x, y, z) : 2\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq x + 2\}.$$

Calcolare

$$\int_E z dx dy dz.$$

### 13.6 Esercizio

Sia

$$E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq z\}.$$

Calcolare

$$\int_E (x^2 + y^2 + z^2 - 1) dx dy dz.$$

### 13.7 Esercizio

Sia

$$E = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq \frac{x}{2} + 3, z \geq 0\}.$$

Calcolare

$$\int_E xz dx dy dz.$$

### 13.8 Esercizio

Sia

$$E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - 2x \leq 0, 0 \leq z \leq x, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}.$$

Calcolare

$$\int_E y dx dy dz.$$

### 13.9 Esercizio

Sia  $E \subset \mathbb{R}^3$  definito dalle limitazioni

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3x^2 + 3y^2}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2.$$

Calcolare il volume di  $E$ .

### 13.10 Esercizio

Sia

$$E = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq (z-1)^2\}.$$

Calcolare il volume e il baricentro di  $E$ .

### 13.11 Esercizio

Sia

$$E = \{(x, y, z) : (x-2)^2 + y^2 \leq z \leq 8-4x\}.$$

Calcolare il volume di  $E$ .

### 13.12 Esercizio

Sia  $E$  il solido ottenuto dalla rotazione intorno all'asse  $z$  di

$$T = \{(y, z) : y^2 - 1 \leq z \leq (y-1)^2, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Calcolare il volume di  $E$ .

### 13.13 Esercizio

Sia  $E$  il solido ottenuto dalla rotazione intorno all'asse  $z$  di

$$T = \{(y, z) : y^2 \geq 4z^2, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Calcolare il volume di  $E$ .

### 13.14 Esercizio

Sia

$$E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$$

Calcolare

$$\int_E z e^{x^2+y^2} dx dy dz$$

### 13.15 Esercizio

Calcolare

$$\int_E 2xz dx dy dz$$

dove  $E$  è il solido contenuto nel primo ottante, limitato dalle superficie  $y = x^2 + z^2$  e dal piano  $y = 1$ .

### 13.16 Esercizio

Calcolare

$$\int_E \exp(z^2) dx dy dz$$

con

$$E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4, \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq z \leq 2\}$$

### 13.17 Esercizio

Data la regione del piano  $xz$

$$D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 4 \leq x^2 + z^2 \leq 9, 3z^2 \leq x^2\},$$

disegnare il solido  $E$ , contenuto nel semispazio  $y \geq 0$ , ottenuto ruotando  $D$  di un angolo piatto attorno all'asse  $z$ . Calcolare il volume di  $E$  e le coordinate del suo baricentro.

### 13.18 Esercizio

Calcolare

$$\iiint_E \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$

dove

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \leq 0, z \geq \sqrt{3}\}.$$

### 13.19 Esercizio

Disegnare l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y^2(4 - y^2)\},$$

e calcolare il volume del solido  $T$  ottenuto facendo ruotare  $D$  intorno all'asse delle  $x$ .

### 13.20 Esercizio

Dati la palla

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

e il cono

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq -1 + 2\sqrt{x^2 + y^2}\},$$

trovare il volume e il baricentro di  $P \setminus C$ .

### 13.21 Esercizio

Dato l'insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 8 - (x^2 + y^2)^{3/2}\},$$

trovarne il volume. Successivamente calcolare

$$\iiint_E xyz \, dx \, dy \, dz,$$

dove

$$E = \{(x, y, z) \in D : 0 \leq y \leq x\}.$$

### 13.22 Esercizio

Calcolare

$$\iiint_E (x^2 y^2 + 1) \, dx \, dy \, dz,$$

dove  $E$  è il solido compreso tra il paraboloido  $z = (x-2)^2 + y^2$  e il piano  $z = 6 - 4x$ .

### 13.23 Esercizio

Sia  $T$  il solido che si ottiene facendo ruotare di un angolo giro intorno all'asse  $z$  la regione

$$D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : 7y^3 \leq z \leq 27 - y^3, y \geq 0\}$$

del piano  $yz$ . Calcolare il volume di  $T$  e l'integrale  $\iiint_T x^2 \, dx \, dy \, dz$ .

### 13.24 Esercizio (\*)

Dati due punti  $A$  e  $B$  nello spazio tridimensionale, in modo che la distanza tra loro sia 1, determinare il baricentro del solido costituito dai punti  $P$  tali che la somma del cubo della distanza di  $P$  da  $A$  più il doppio del quadrato della distanza di  $P$  da  $B$  sia inferiore o uguale a 2.

### 13.25 Esercizio (\*)

Calcolare

$$\iiint_E z \, dx \, dy \, dz,$$

dove  $E$  è il solido, contenuto nel semispazio  $\{x \geq 0\}$ , delimitato dai piani  $x = 0$ ,  $z = 0$ , dalla sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}$  e dal cono che proietta dall'origine il ramo di iperbole  $x = 1$ ,  $z = \sqrt{3 + 2y^2}$ . Suggerimento: si passi a un sistema di coordinate sferiche.

### 13.26 Esercizio

Calcolare l'area della superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z = 2 + x^2 + y^2\}$$

dove

$$D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

### 13.27 Esercizio

Indicata con  $S$  la superficie ottenuta per rotazione intorno all'asse  $z$  del grafico della funzione

$$x = 1 - \sqrt{1 - z^2}, \quad z \in [-1, 1],$$

- determinare una rappresentazione parametrica di  $S$ ,
- calcolare l'area di  $S$ ,
- calcolare l'integrale superficiale

$$\iint_S z \, d\sigma.$$

### 13.28 Esercizio

Calcolare l'area della superficie di equazioni parametriche

$$x = u \cos(v), \quad y = u \sin(v), \quad z = u^2, \quad u \in [1, 2], \quad v \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$