Avvisi

- Oggi esercitazione ore 14:30 → Aula Amaldi Prof. Montefusco

- Compilare i questionari sui corsi

- Martedì prossimo orario 12:10 → 13:50.

TEOREMA (cambiamento di variabili negli integrali doppi).

Siano T, D due domini regolari di $\mathbb{R}^2$, e sia $\phi : T \to D$ una funzione tale che

1) ϕ biettiva
2) $\phi \in C^1(T; D)$
3) lo jacobiano di ϕ è sempre $\neq 0$.

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0 \quad \forall (u,v) \in T.$$

$$\phi : T \longrightarrow D$$
$$(u,v) \longmapsto \Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

ϕ è un diffeomorfismo di classe C^1 tra T e D.

OSS se ϕ è un diffeomorfismo ϕ^{-1} è un diffeomorfismo (segue dal teorema di invertib. locale).

Allora, $\forall$ funzione $f(x,y)$ continua in D si ha:

$$\iint_{\substack{D \\ \| \\ \Phi(T)}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_T \underbrace{f(\phi(u,v))}_{\substack{\| \\ f(x(u,v),\,y(u,v))}} \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \right| du\,dv$$

Passaggio a coordinate polari

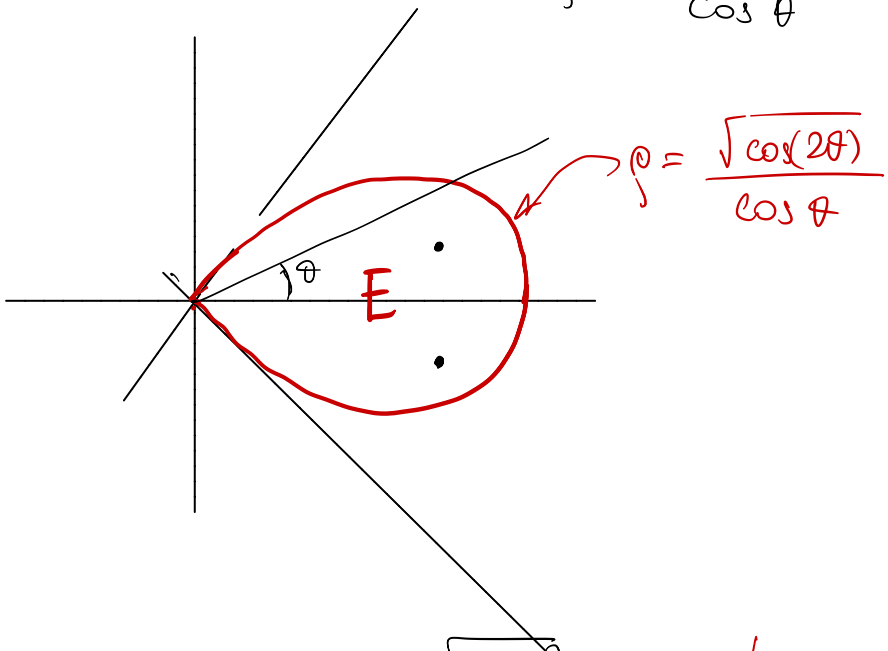
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

TEOREMA Siano T e D due domini normali regolari risp. di $[0,+\infty)\times[0,2\pi]$ e $\mathbb{R}^2$, t.c. la trasf. $\phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$ verifichi $\Phi(T) = D$. Allora si ha

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_T f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta.$$

$\forall f$ continua in D.

ESERCIZIO Calcolare $\iint_E x^2\,dx\,dy$, dove E è la porzione di piano racchiusa dalla curva $\rho = \frac{\sqrt{\cos(2\theta)}}{\cos\theta}$ $\quad -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$.



$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$

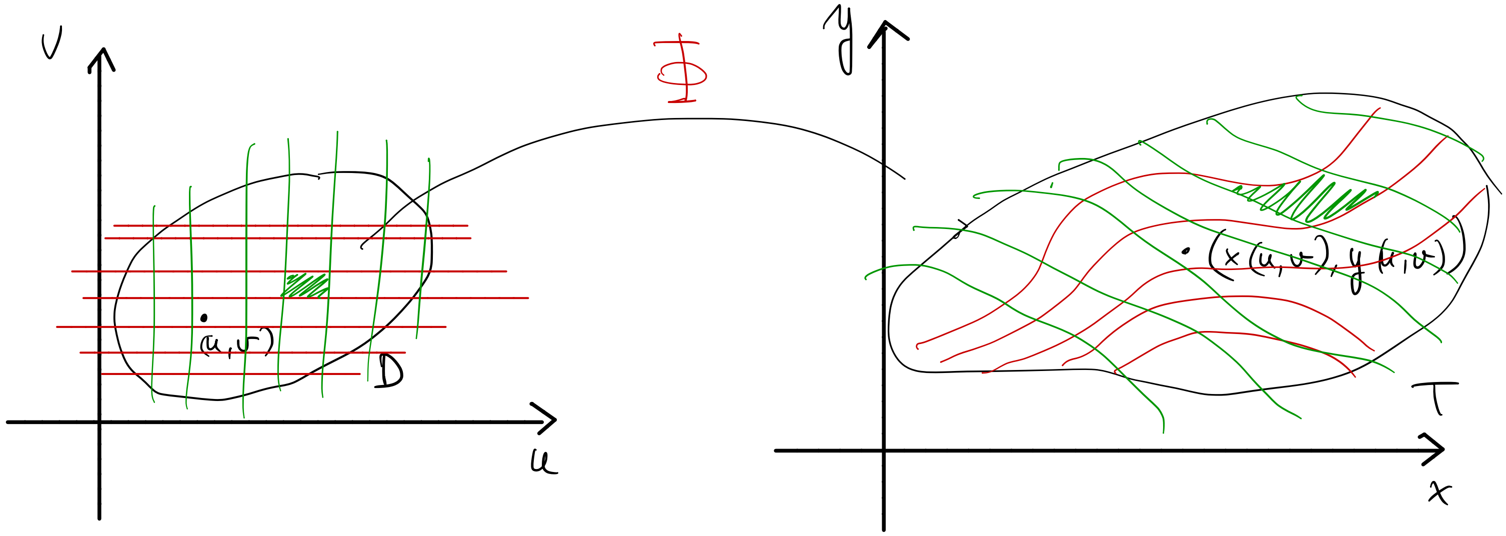
$$\iint_E x^2\,dx\,dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{\cos(2\theta)}}{\cos\theta}} d\rho\ \rho^2\cos^2\theta\,\rho = \frac{2}{4}\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta\ \frac{\cos^2(2\theta)}{\cos^4\theta}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{(2\cos^2\theta-1)^2}{\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(4\cos^2\theta - 4 + \frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta = \dots\dots$$

Esercizio Calcolare l'area di E dell'esercizio precedente

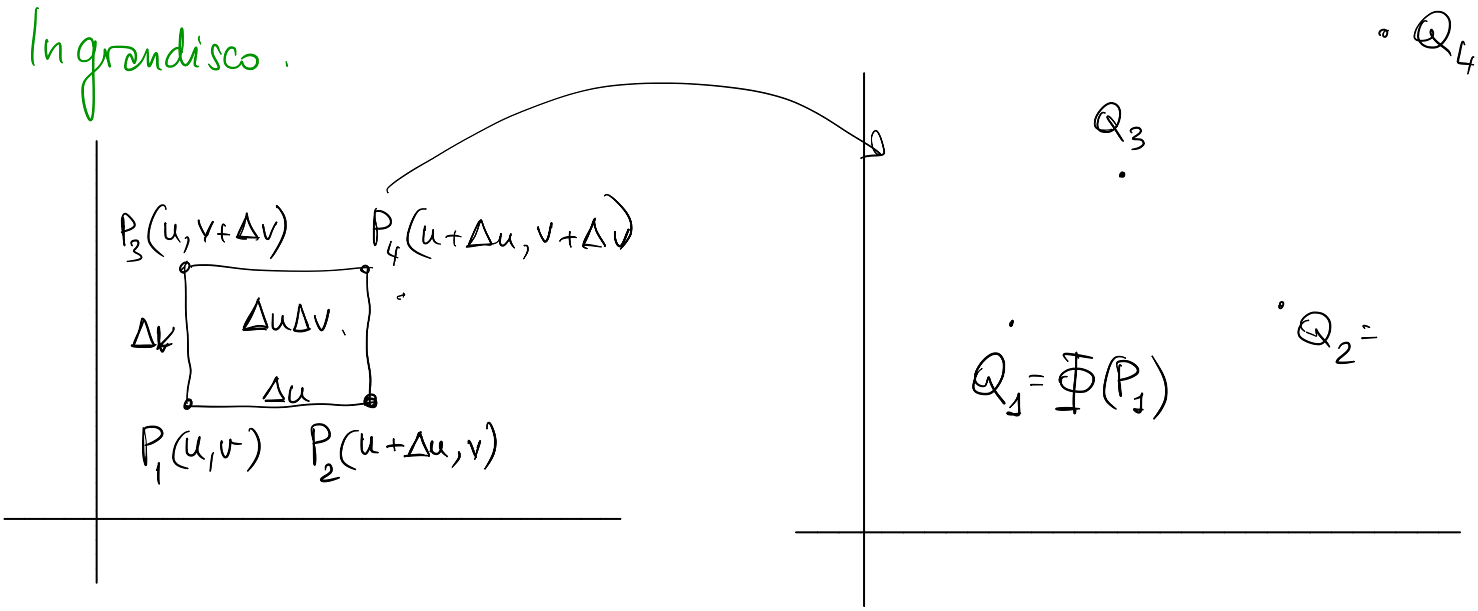
$$\text{Area } E = \iint_E 1\, dx\,dy = 2\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{\cos(2\theta)}}{\cos\theta}} d\rho\ \rho = \text{(Concludere da soli)}$$

Significato dello jacobiano nel cambiamento di coordinate

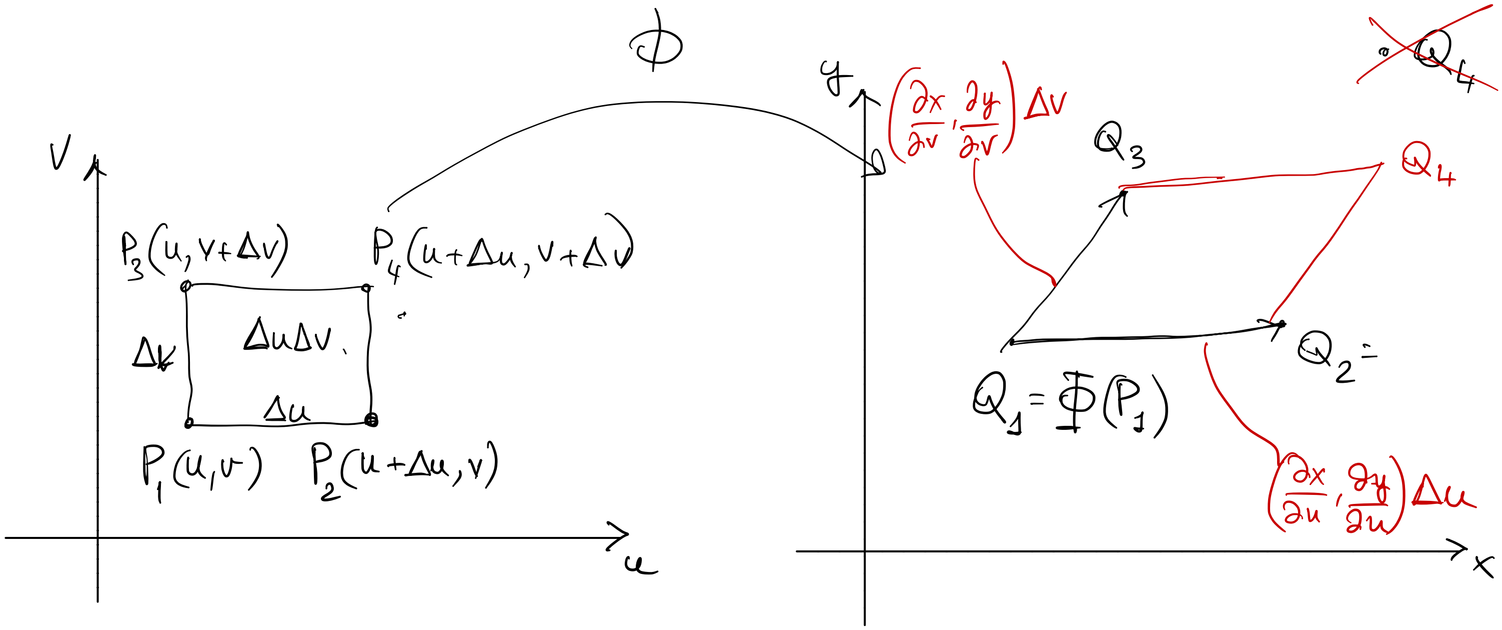


$$\Phi(u,v) = (x(u,v),\, y(u,v))$$

Ingrandisco.



$$Q_i = \Phi(P_i) \qquad i = 1 \dots 4.$$



$$Q_i = \Phi(P_i) \qquad i = 1 \dots 4.$$

$$Q_2 = \Phi(P_2) = \Phi(u+\Delta u, v) = \big(x(u+\Delta u, v),\, y(u+\Delta u, v)\big)$$

Δu "molto piccolo"

$$x(u+\Delta u, v) \approx x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\,\Delta u$$

$$y(u+\Delta u, v) \approx y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\,\Delta u.$$

$$Q_2 \cong Q_1 + \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right)\Bigg|_{(u,v)} \Delta u$$

Analogamente

$$Q_3 \cong Q_1 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}\right)\Bigg|_{(u,v)} \Delta v.$$

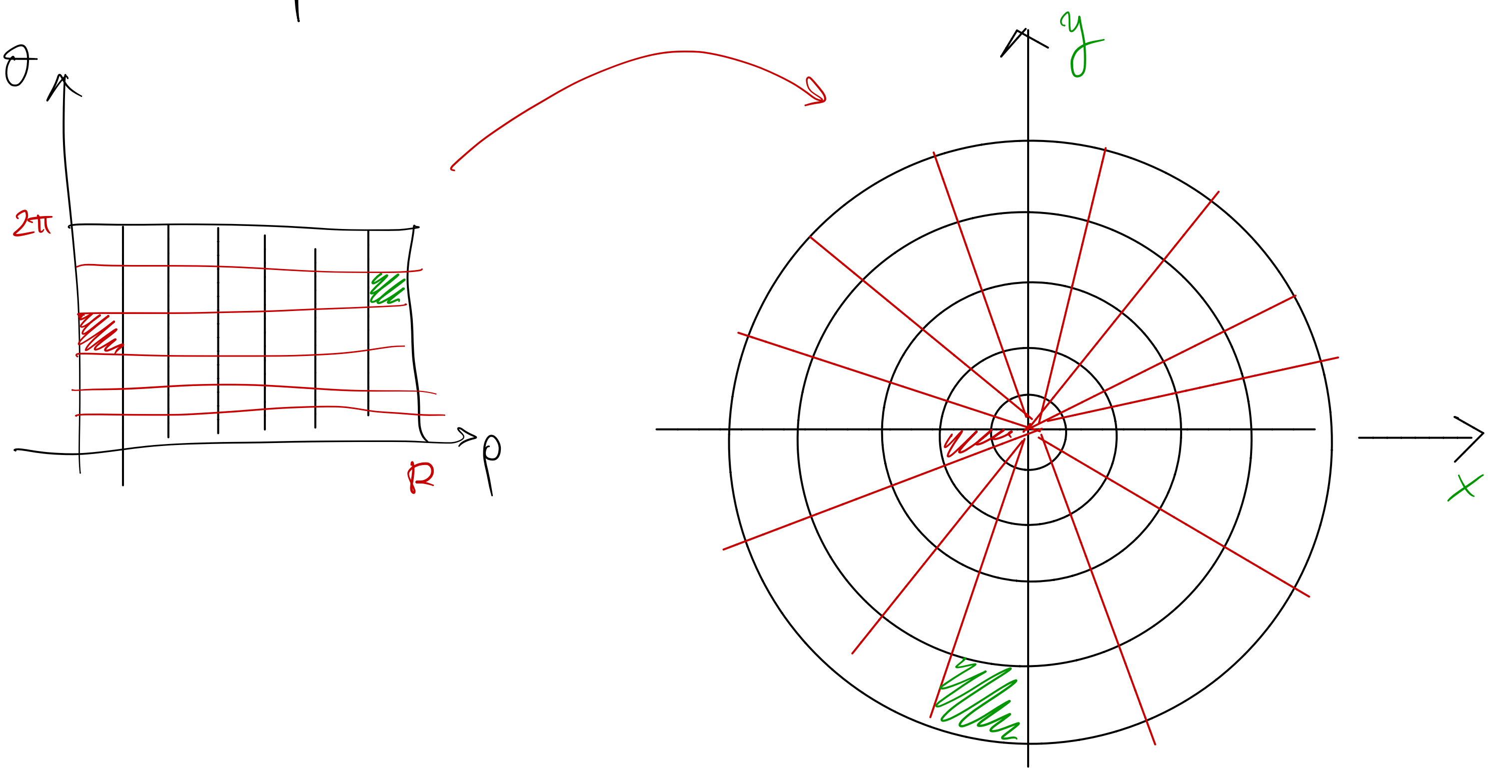
$$Q_4 = \Phi(P_4) = \big(x(u+\Delta u, v+\Delta v),\, y(u+\Delta u, \cancel{v}+\Delta v)\big) = (*)$$

Formula di Taylor del 1° ordine:

$$x(u+\Delta u, v+\Delta v) \approx x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\,\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\,\Delta v.$$

$$Q_4 \cong \left(x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Delta v,\; y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Delta v\right) =$$

In coordinate polari

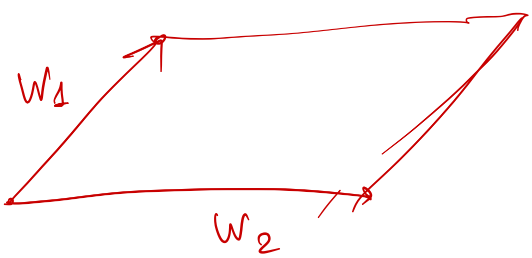


Il termine ρ dello jacobiano corrisponde a far pesare diversamente regioni come quella rossa e quella verde, che corrispondono a aree ben diverse nel piano (x,y)

$$Q_4 \cong \left(x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\,\Delta v,\ y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Delta v \right) =$$

$$= Q_1 + \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \right) \Delta u + \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \right) \Delta v.$$

Area (parallelogramma $Q_1Q_2Q_3Q_4$) = area del parallelogramma costruito sui due vettori $\underline{W}_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} \right) \Delta u$ $\quad \underline{W}_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \right) \Delta v$.



$$\text{area} = \left| \det \begin{pmatrix} (W_1)_1 & (W_1)_2 \\ (W_2)_1 & (W_2)_2 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u \\ \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \Delta u \, \Delta v \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right|$$

Al rettangolino di area $\Delta u \Delta v$ corrisponde, mediante la trasformaz. ϕ, un parallelogramma di area $\Delta u \Delta v \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$

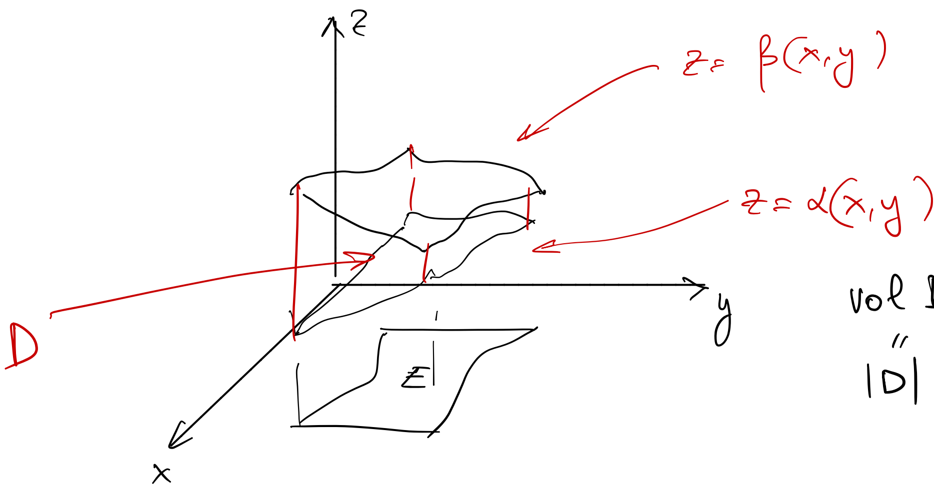
Integrali tripli.

D = dominio normale rispetto al piano xy (di $\mathbb{R}^3$) =

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \in E, \quad \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$$

dove E è un dominio normale del piano xy,

$\alpha(x,y), \beta(x,y) : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue e tali che $\alpha(x,y) \le \beta(x,y)$



$$\underset{\underset{|D|}{\parallel}}{\mathrm{vol}\, D} = \iint_E [\beta(x,y) - \alpha(x,y)]\, dx\,dy$$

Sia $f(x,y,z)$ una funzione definita in D e limitata

Data una partizione P di D in n domini normali $\{D_i\}_{i=1\ldots n}$ a interni disgiunti, porremo

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{vol}(D_i) \sup_{(x,y,z)\in D_i} f(x,y,z)$$

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{vol}(D_i) \inf_{D_i} f$$

Prendiamo $\sup\limits_{P \text{ partiz. di } D} s(P)$ e $\inf\limits_{P \text{ partiz. di } D} S(P)$

Si dim. che $\sup\limits_{P} s(P) \leq \inf\limits_{P} S(P)$

Se sono uguali, f si dice Riemann-integrabile in D e si pone

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \sup_P s(P) = \inf_P S(P)$$

Alcuni risultati:

1) Se f è continua in D, è Riemann-Integrabile

2) L'integrale gode delle proprietà che ci aspettiamo.

a) linearità

b) monotonia

c) $\iiint_D c\,dx\,dy\,dz = c \operatorname{vol} D.$

d) additività rispetto al dominio di integraz

e) dis. triangolare $\left|\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\right| \leq \iiint_D |f(x,y,z)|\,dx\,dy\,dz$

f) teorema della media

$$\operatorname{vol}(D) \inf_D f \leq \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \leq \operatorname{vol}(D) \sup_D f$$

Formule di riduzione

Se D è come sopra, e f è continua in D, allora

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_E dx\,dy \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} dz\, f(x,y,z) \right) =$$

integrazione per fili

se $E = \{(x,y) : a \le x \le b,\ \gamma(x) \le y \le \delta(x)\}$

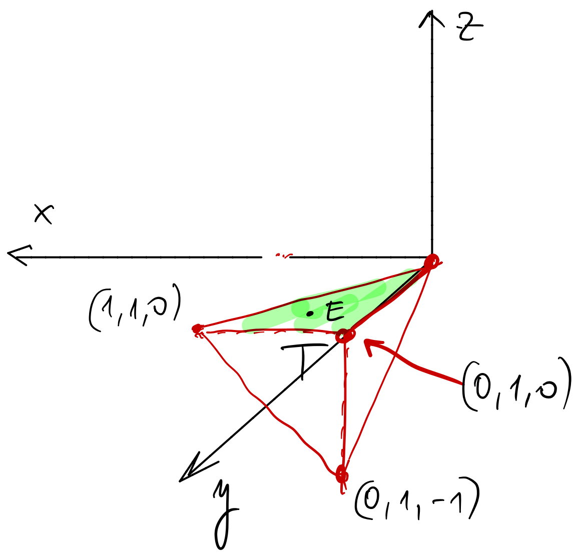
$$= \int_a^b dx \left(\int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} dy \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} dz\, f(x,y,z) \right) \right) =$$

$$= \int_a^b dx \iint_{E_x} dy\,dz\, f(x,y,z)$$

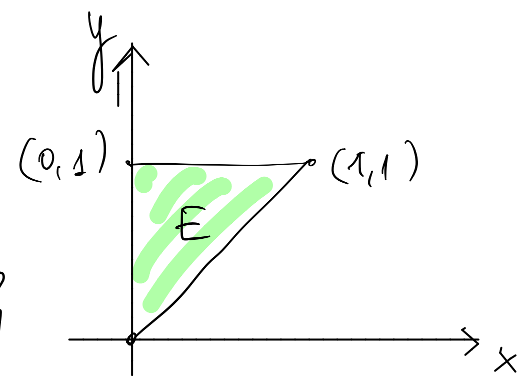
integrazione per fettine.

dove $E_x = \{(y,z) : (x,y,z) \in E\}$

ESERCIZIO Calcolare $\iiint_T \log(z+y+3)\,dx\,dy\,dz$, dove T è il tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(0,1,-1)$.



OSS f continua in T



$$T = \{(x,y,z) : (x,y) \in E : x-y \le z \le 0\}$$

$z = ax + by$ Passaggio per $(1,1,0)$ $\quad 0 = a+b$

" " $(0,1,-1)$ $\quad -1 = b$

$z = x - y$

$$E = \{(x,y) : 0 \le y \le 1, \quad 0 \le x \le y\}$$

$$\iiint_T \log(z+y+3)\,dx\,dy\,dz = \iint_E dx\,dy \int_{x-y}^{0} dz \, \log(z+y+3) = (*)$$

$$\int \log t \, dt = t \log t - t + c = t(\log t - 1)$$

$$(*) = \iint_E dx\,dy \Big[(z+y+3)\big(\log(z+y+3) - 1\big)\Big]_{z=x-y}^{z=0} =$$

$$\iiint_T \log(z+y+3)\,dx\,dy\,dz = \iint_E dx\,dy \int_{x-y}^{0} dz\, \log(z+y+3) = (*)$$

$$\int \log t\,dt = t\log t - t + c = t(\log t - 1)$$

$$(*) = \iint_E dx\,dy\, \Big[(z+y+3)\big(\log(z+y+3)-1\big)\Big]_{z=x-y}^{z=0} =$$

$$= \iint_E dx\,dy\,\Big[(y+3)\big(\log(y+3)-1\big)-(x+3)\big(\log(x+3)-1\big)\Big] =$$

$$= \int_0^1 dy \left[\int_0^y dx\, \Big[(y+3)\big(\log(y+3)-1\big) - (x+3)\big(\log(x+3)-1\big)\Big]\right] =$$

$$= \int_0^1 dy\left[(y+3)\big(\log(y+3)-1\big)y - \frac{(x+3)^2}{4}\big(2\log(x+3)-3\big)\Big|_{x=0}^{x=y}\right] =$$

$$\int t(\log t -1)\,dt = \frac{t^2}{2}(\log t-1) - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{t}\,dt = \frac{t^2}{2}(\log t -1) - \frac{t^2}{4} =$$

$$= \frac{t^2}{4}(2\log t - 3) + c.$$

$$= \int_0^1 dy \left[y(y+3)\big(\log(y+3)-1\big) - \frac{(y+3)^2}{4}\big(2\log(y+3)-3\big) + \frac{9}{4}(2\log 3-3)\right]$$

= analisi 1 ..